$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2016. április 8.
V. osztály

1. Egy anya éveinek száma ugyanannyi, mint a lánya életkora hónapokban kifejezve. Mennyi idősek külön-külön, ha az anya 23 évvel és 10 hónappal idősebb a lányánál?

2. Melyek azok a 2016-nál kisebb természetes számok, amelyeket 3-mal megnövelve a számjegyek összege 3-szorosára lecsökken?

3. Egy motoros három nap alatt teszi meg a kijelölt útját. Első nap az út harmadánál 6 kilométerrel kevesebbet tesz meg. A második nap 5 kilométerrel többet tesz meg a megmaradt út hatodánál. Így a harmadik napra 200 km út maradt hátra. Mekkora távolságot tett meg a motoros a három nap alatt összesen?

4. Az ifjú Vályi Gyula 21 számot írt egy lapra. Utána a leírt számokat elosztotta 20-al és megállapította, hogy az első 20 osztás maradéka különbözik egymástól és a maradékok kettővel kisebbek a hányadosoknál. Az utolsó osztás maradéka egyenlő volt a hányadossal, a maradékok összege pedig 200 volt.

   (a) Melyik volt a Vályi Gyula által leírt 21. szám?

   (b) Mennyi a Vályi Gyula által leírt első 20 szám összege?

5. Adott az $\mathscr{A} = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{9...99}_{2016 \text{ db}}$ szám. Határozzuk meg, hogy hány 1-es számjegy van az $\mathscr{A}$ számban?

Munkaidő 3 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 5 pont szerezhető.

$\iint\limits_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2016. április 8.
VI. osztály

---

1. Melyek azok az ötjegyű természetes számok, amelyekben balról írva a számjegyek éppen a számnak 2, 3, 4, 5 és 6-tal való osztási maradékai?

2. Legyenek az $\widehat{AOB}$ és $\widehat{COD}$ szögek közös csúcsú derékszögek. Legyen $[OM$ a $\widehat{DOB}$ szög szögfelezője.

   (a) Igazoljuk, hogy az OM ellentétes félegyenese szögfelezője $\widehat{AOC}$ szögnek.

   (b) Ha a $\widehat{COM}$ szög 105^o-os, határozzuk meg a $\widehat{COA}$ és $\widehat{MOB}$ szögfelezői által bezárt szög mértékét.

3. Létezik-e olyan p prímszám, amelyre
$$(p^2 - 2p + 1, 2p^2 + p + 1) = p,$$
ahol $(\cdot,\cdot)$ a legnagyobb közös osztót jelöli?

4. Igazoljuk, hogy ha $\overline{abc}\,⋮\,37$ akkor a $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ számok is oszthatók 37-el.

5. Adott az ABC háromszög. Legyenek $[AM$ illetve $[AN$ a $\widehat{BAC}$ szög belső illetve kűlső szögfelezői, $M, N \in BC$. Legyen $D \in AN$ úgy, hogy $DC \perp BC$. Legyen $E \in DM$ úgy, hogy $NE \perp DM$. Bizonyítsuk be, hogy az DC, AM, NE összfutó egyenesek.

Munkaidő 3 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 5 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2016. április 8.
VII. osztály

---

1. Mutassuk ki, hogy a $\underbrace{44...4}_{2016} - \underbrace{88..8}_{1008}$ szám teljes négyzet.

2. Határozzuk meg a $8\,x^2 - 14\,xy + 16\,y^2 - 4\,x - 36\,y + 2056$ kifejezés legkisebb értékét.

3. Az $ABCD$ négyzetben legyenek M, N, O az $[AB]$, $[BC]$ illetve $[DM]$ szakaszok felezőpontjai. Legyen $\{P\} = DN \cap CM$. Igazoljuk, hogy
$$OP = \frac{1}{2}MC.$$

4. Az $ABCD$ paralelogrammában M a BC oldal felezőpontja és N a D pont M szerinti szimmetrikusa.
   (a) Igazoljuk, hogy az A, B és N pontok kollineárisak.
   (b) Legyen P az MN, R pedig a BN szakasz felezőpontja. Számítsuk ki az $ABCD$ paralelogramma területét tudva, hogy az RPN_{Δ} háromszög területe $25cm^2$.

5. (a) Legyen x egy olyan valós szám, amelyre $|x| \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy $x(x-1) \geq 2$.
   (b) Legyen a, b két olyan valós szám, amelyek abszolút értékei 2-nél nagyobbak. Bizonyítsuk be, hogy
$$(a^2+1)(b^2+1) \geq (a+b)(ab+1) + 5.$$
   Mikor áll fent az egyenlőség?

Munkaidő 3 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 5 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2016. április 8.
VIII. osztály

---

1. Legyenek a, b, c olyan valós számok amelyekre $a + b + c = 223$ és $a, b, c \geq -\frac{1}{3}$. Mutassuk ki, hogy
$$\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1} \leq \sqrt{2016}.$$

2. Egy kör kerületére felírtuk az $x_0, x_1, ..., x_{2016}$ számokat ebben a sorrendben. Tudva, hogy bármely két szomszédos szám különbségének abszolút értéke megegyezik és
$$|x_0 + x_1 + ... + x_{2016}| = 2017,$$
határozzuk meg a számokat.

3. Össze lehet-e állítani 1×1-es és 2×2-es négyzetekből egy nagyobb négyzetet úgy, hogy a felhasznált kétféle négyzet együttes száma:
   (a) 2016?
   (b) 2015?

4. Adott egy $ABCD$ tetraéder. Létezik-e olyan sík amelyre ha levetítjük az $ABCD$ tetraédert, egy paralelogrammát kapunk?

5. Legyen $ABCDA'B'C'D'$ szabályos négyoldalú hasáb. Legyen E, F, F' az AB, BC, $B'C'$ élek felezőpontjai, $AB = 6cm$ és $AA' = 9cm$.
   (a) Igazoljuk, hogy $AF \perp DE$.
   (b) Határozzuk meg $\operatorname{tg}(\widehat{(ABC),(F'DE)})$ értéket.
   (c) Legyen $P \in BB'$. Számítsuk ki a $[BP]$ hosszát, ha tudjuk, hogy az $A'PF_{\Delta}$ kerülete minimális.

Munkaidő 3 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 5 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)\,dxdy$

XXII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2016. április 8.
Megoldások

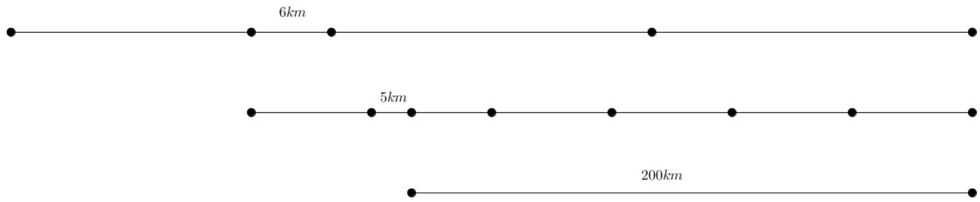
V. osztály

1. Jelöljük x-el az anya éveinek a számát. Ez hónapokban kifejezve $12x$ hónap. A feladat feltételeit kihasználva, világos, hogy
$$12x = x + 23 \cdot 12 + 10.$$
Megolva a fenti egyenletet kapjuk, hogy $x = 26$. Tehát ez azt jelenti, hogy az anya 26 éves, a lánya pedig 2 éves 2 hónapos.

2. Tudjuk, hogy ha egy szám utolsó számjegye 6 vagy annál kisebb, akkor a számot megnövelve 3-mal az utolsó számjegy megnő, így a számjegyek összege is. Tízes átlépés esetén csökkenhet csak az összeg, így az utolsó számjegyek 7, 8 vagy 9 lehet.

   - Legyen a keresett szám $\overline{abc7}$. Ha 3-mal megnöveljük $c < 9$ eseten az új számjegyek összege 3-szorozva kiadja az eredeti számjegyek összegét, azaz:
   $$3 \cdot (a + b + c + 1) = a + b + c + 7.$$
   Tovább alakítva a fenti összefüggést, világos, hogy
   $$2(a + b + c) = 4.$$
   Ekkor a keresett számok 2007, 1107, 1017, 207, 117, 27. Ha $c = 9$, akkor világos, hogy
   $$3(a + b + 1) = a + b + 9 + 7,$$
   azaz
   $$2(a + b) = 13.$$
   Az utóbbi összefüggés nem lehetséges.
   - Legyen a keresett szám $\overline{abc8}$. Ha $c < 9$ akkor
   $$3(a + b + c + 1 + 1) = a + b + c + 8,$$
   azaz
   $$2(a + b + c) = 2.$$
   Tehát a keresett számok $1008, 108, 18$.
   - Legyen a keresett szám $\overline{abc9}$. Ekkor
   $$3(a + b + c + 1 + 2) = a + b + c + p \Rightarrow a + b + c = 0.$$
   Tehát ebben az esetben csak a 9 elégíti ki a kért feltételeket.

3. A feladatot a szakaszos megoldási módszerrel oldjuk meg. Tekintsük az alábbi ábrát: Az ábráról látható, hogy $200 + 5 = 205$, így $205 : 5 = 41$, tehát $41 \cdot 6 = 246$, ekkor $246 - 6 = 240$, azaz $240 : 2 = 120$. Tehát $120 \cdot 3 = 360km$ tett meg a motoros.



4. (a) Legyen $a_n : 20 = c_n$ maradék m_n, ahol $m_n < 20$. Ekkor a maradékos osztály tétele alapján

$$a_n = 20 \cdot c_n + r_n$$

ahol $m_n \in \{0, 1, 2, 3, ?, 19\}$, ahol $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq ... \neq r_{20}$. Növekvő sorrendbe rendezve a maradékokat $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 2, ...r_{20} = 19$. A maradékok összege: $19 \cdot 10 + r_{21}$, $S = 190 + r_{21}$ tehát $r_{21} = 10$ és $c_{21} = 10$, így $a_{21} = 10 \cdot 20 + 10 = 210$

(b) Ha $r_1 = 0$ tehát $c_1 = 2$, $r_2 = 1$ tehát $c_2 = 3$,...,$r_{20} = 19$ tehát $c_{20} = 21$. Ekkor $a_1 = 2 \cdot 20 + 0$, $a_1 = 3 \cdot 20 + 1$ $a_1 = 4 \cdot 20 + 2$,$a_1 = 21 \cdots 20 + 19$. Ekkor

$$S = 20(2 + 3 + 4 + ... + 21) + 0 + 1 + 2 + ... + 19,$$

$$S = 4620 + 190$$

$$S = 4810.$$

5. Az $\mathscr{A}$ számot más alakban írjuk fel, majd elvégezzük a kijelölt műveleteket, hogy meghatározhatjuk az 1-es, számejegyek számát:

$$\mathscr{A} = 9 + 99 + ... + \underbrace{99..9}_{2016} = (9 + 1) + (99 + 1) + ... + (\underbrace{99..9}_{2016} + 1) - 2016,$$

ekkor

$$\mathscr{A} = 10 + 100 + 1000 + ... + 1\underbrace{00..0}_{2016} - 2016 = \underbrace{111..1}_{2016}0 - 2016 = \underbrace{11..1}_{2014}9094.$$

$\iint_\Sigma V(p,q)dxdy$

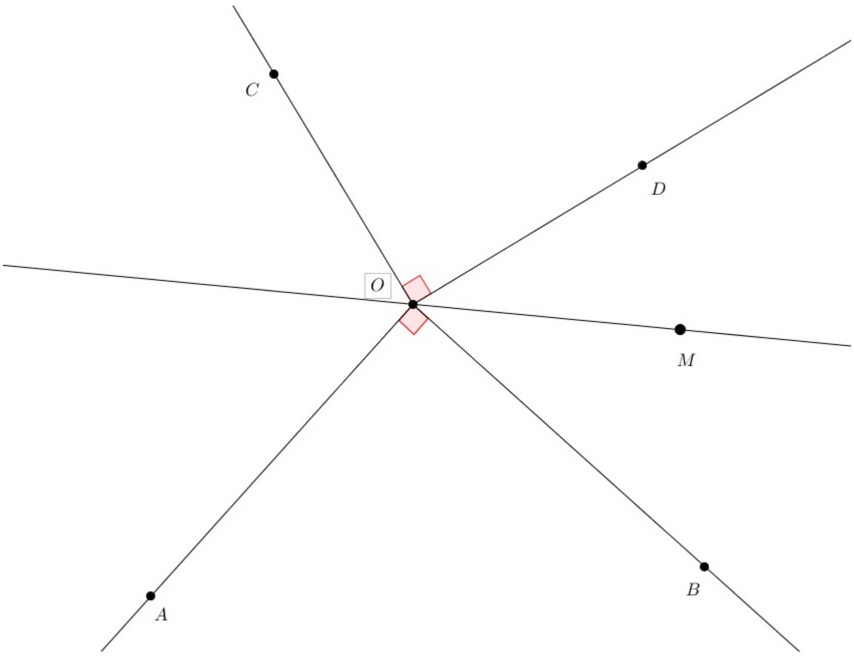
XXII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2016. április 8.
Megoldások

VI.osztály

1. Ötjegyű szám lévén nem kezdünk 0-val, így kett?vel osztva a számot a maradék csak 1 lehet, tehát az ötjegyű szám 1-el kezdődik és páratlan. Hattal való osztáskor a maradék 5-nél kisebb vagy egyenlő, de páratlan szám lévén a maradék csak 1, 3 vagy 5 lehet. Három eset van tehát: a szám lehet 1___1, 1___3 vagy 1___5. Mivel a szám $6k+1$, $6k+3$ vagy $6k+5$ alakú, ezért 3-mal osztva a maradékok 1, 0 illetve 2 lesz, így a számok: 11__1, 10__3 vagy 12__5 alakúak lehetnek.

   5-tel való osztás maradéka lesz az utolsó előtti számjegy, azaz a számok: 11_11, 10_33 vagy 12_05. 4-gyel való osztás maradéka lesz a középső számjegy, azaz a számok: 11311, 10133 vagy 12105. A második szám 3-mal osztva nem ad 0-t maradékul, az utolsó nem ad 2-t így nem jó megoldások. Az egyetlen, amelyik az összes feltételnek megfelel és így a megoldás: 11311.

2. Tekintsük az alábbi ábrát.



   (a) Legyen ON az OM meghosszabítása. Ekkor

   $$m(\widehat{NOA}) = 180^o - [m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOM})] = 180^o - [90^o + m(\widehat{DOM})] = 180^o - [m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOM})$$

   Világos, hogy
   $$180^o - [m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOM})] = m(\widehat{NOC}),$$

   ami pontosan azt jelenti, hogy ON szögfelezője $\widehat{COA}$-nak.

(b) Legyen OS szögfelezője az $\widehat{MOB}$-nek. Ekkor

$$m(\widehat{DOM}) = m(\widehat{BOM}) = 60^o, \quad m(\widehat{MOS}) = 30^o.$$

Azaz

$$m(\widehat{NOS}) = 180^o - [m(\widehat{SOM})] = 180^o - 30^o = 150^o.$$

3. Tegyük fel, hogy létezik-e olyan p prímszám, amelyre

$$(p^2 - 2p + 1, 2p^2 + p + 1) = p,$$

azaz

$$\begin{cases} p|p^2 - 2p + 1, \\ p|2p^2 + p + 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p|p^2 - 2p + 1, \\ p|2(2p^2 + p + 1) = 4p^2 + 2p + 2, \end{cases} \Rightarrow p|4p^2+2p+2+p^2-2p+1 = 5p^2+3,$$

tehát $p|5p^2 + 3$ ez pontosan azt jelenti, hogy $p|3$. Azaz $p = 3$. De, $p^2 - 2p + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$, és $2p^2 + p + 1 = 18 + 3 + 1 = 22$, tehát

$$(4, 22) = 3,$$

ami ellentmondás. Tehát nem létezik a keresett prímszám.

4. Világos, hogy

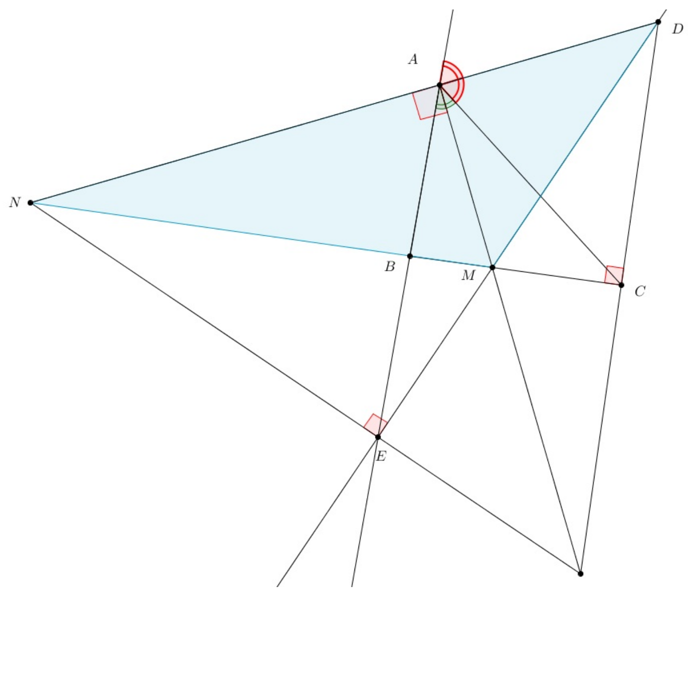
$$\overline{bca} = 10\overline{bc} + a = 1000a + 10\overline{bc} - 999a = 10\overline{abc} - 999a.$$

Mivel $999 = 37 \cdot 27$, ezért látható, hogy $\overline{bca} \vdots 37$. Szintén beláthatjuk, hogy

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a + b + c),$$

tehát $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} \vdots 37$ $(111 = 3 \cdot 37)$. Mivel, $\overline{abc}, \overline{bca} \vdots 37$, következik, hogy $\overline{cab} \vdots 37$.

5. Tekintsük a következő ábrát. Ekkor világos, hogy a DNM_Δ háromszögben DC magasság. Hasonlóan (felhasználva a belső és külső szögfelezők egymásra merőlegesek) MA szintén magasság. Végül (szerkesztés alapján) NE szintén magasság a DNM_Δ háromszögben.



$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2016. április 8.
Megoldások

VII. osztály

1. Oldjuk meg a feladatot általános esetben. Azaz tekintsük a következő számot:

$$a = \underbrace{44..4}_{2n} - \underbrace{88...8}_{n}.$$

Világos, hogy

$$a = 4\left(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + ... + 10 + 1\right) - 8\left(10^{n-1} + ... + 10 + 1\right).$$

Tekintsük most az

$$S = 10^{m-1} + 10^{m-2} + ... + 10 + 1.$$

Ekkor

$$10S = 10^m + 10^{m-1} + ... + 10^2 + 10,$$

így

$$10S - S = 10^m - 1 \quad \text{azaz } S = \frac{10^m - 1}{9}.$$

Felhasználva a fenti képletet

$$4\frac{10^{2n} - 1}{9} - 8\frac{10^n - 1}{9} = \frac{4}{9}\left(10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1\right) = 2\left(\frac{10^n - 1}{3}\right)^2.$$

Világos, hogy a $\frac{10^n - 1}{3} \in \mathbb{N}$, azaz a teljes négyzet.

2. Kialakítva teljes négyzeteket világos, hogy

$$8x^2 - 14xy + 16y^2 - 4x - 36y + 2056 = 7\,(x-y)^2 + 9\,(y-2)^2 + (x-2)^2 + 2016.$$

Tehát a kifejezés minimuma 2016. Világos, hogy az $x = y = 2$ értékekre el is érődik a 2016.

3. Tekintsük az alábbi ábrát. Világos, hogy

$$CMB_{\Delta} \equiv DNC_{\Delta},$$

ugyanis $[BM] = [CN]$, $[CM] = [DN]$, valamint $[DC] = [BC]$. Tehát

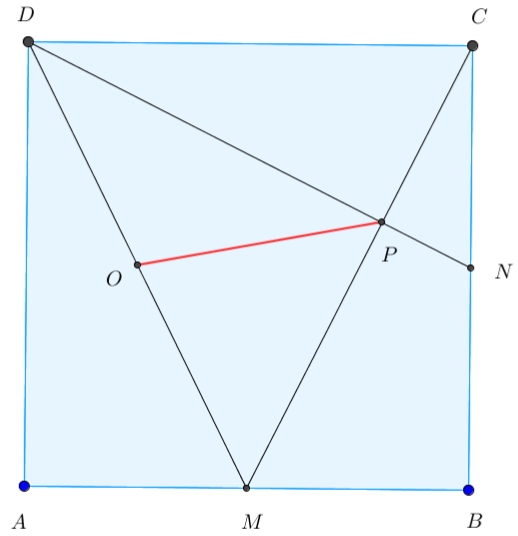
$$m(\widehat{NCP}) \equiv m(\widehat{NDC}), \quad m(\widehat{CMB}) \equiv m(\widehat{DNC}),$$

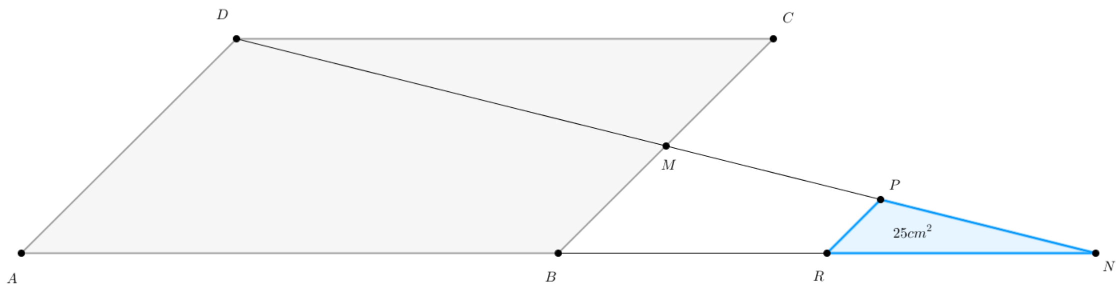
azaz

$$m(\widehat{DNC}) + m(\widehat{NCP}) = 90^o,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $DN \perp CM$. Hasonlóan világos, hogy $CM = DM$. Tehát a DPM derékszögű háromszögben O az átfogó felezőpontja, azaz

$$OP = \frac{DM}{2} = \frac{MC}{2}.$$





4. (a) Tekintsük az alábbi ábrát. Világos, hogy

$$DMC_\Delta \equiv BMN_\Delta,$$

azaz

$$m(\widehat{DCM}) \equiv m(\widehat{MBN}).$$

A fenti összefüggés alapján észrevehető, hogy

$$DC \parallel BN.$$

Felhasználva, hogy $ABCD$ paralelogramma, kapjuk, hogy A, B, N kollineáris pontok.

(b) Legyen $h = d(P, BN)$. Világos, hogy a PR oldalfelező a BPN háromszög területét két egyenlő részre osztja. Tehát

$$T_{BPR_\Delta} = T_{RPN_\Delta} = \frac{1}{2} RN \cdot h.$$

Hasonlóan, mivel BP oldalfelező a BMN_Δ háromszögben, ezért

$$T_{BMN_\Delta} = T_{BPN_\Delta}.$$

Ekkor felhasználva, hogy $T_{ABCD} = 2T_{AMD_\Delta}$ és

$$T_{AMD_\Delta} = T_{AMN_\Delta} = 2T_{BMN_\Delta} = 4T_{BPN} = 8T_{BPR},$$

kapjuk, hogy $T_{ABCD} = 400cm^2$.

5. (a) A feladatben szereplő egyenlőtlenség átírható, a következőre

$$x^2 - x - 2 \geq 0,$$

azaz

$$(x+1)(x-2) \geq 0.$$

Az utóbbi egyenlőtlenséget két esetben kell megvizsgálnunk: ha $x \geq 2$, illetve ha $x \leq -2$. Látható, hogy az első esetben két pozitív szám szorzata van, míg a második esetben két negatív szám szorzata van az egyenlőtlenségben. Tehát mindkét esetben a szorzat pozitív, amivel igazoltuk a kért egyenlőtlenséget.

(b) Egyszerű számolással megkapható, hogy

$$\begin{aligned}(a^2+1)(b^2+1) - (a+b)(ab+1) + 5 &= (a^2b^2 - a^2b - ab^2 + ab) + (a^2 + b^2 - a - b - ab) - 4 \\ &= ab(a-1)(b-1) + \frac{(a-b)^2 + a(a-2) + b(b-2)}{2} - 4 \\ &= [a(a-1)] \cdot [b(b-1)] + \frac{(a-b)^2 + a(a-2) + b(b-2)}{2}.\end{aligned}$$

Felhasználva a feladat (a) pontját, világos, hogy

$$[a(a-1)] \cdot [b(b-1)] \geq 4.$$

Hasonló gondolat menet alapján mint az (a)-ban igaz, hogy

$$x(x-2) \geq 0, \quad \forall |x| \geq 2.$$

Tehát az egyenlőtlenséget igazoltuk.

XXII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2016. április 8.
Megoldások

VIII. osztály

1. Felhasználva az
$$\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}},$$
egyenlőtlenséget az $x = \sqrt{3a+1}$, $y = \sqrt{3b+1}$, $z = \sqrt{3c+1}$ választással kapjuk, hogy
$$\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1} \leq \sqrt{3(a+b+c+1)} = \sqrt{2016}.$$

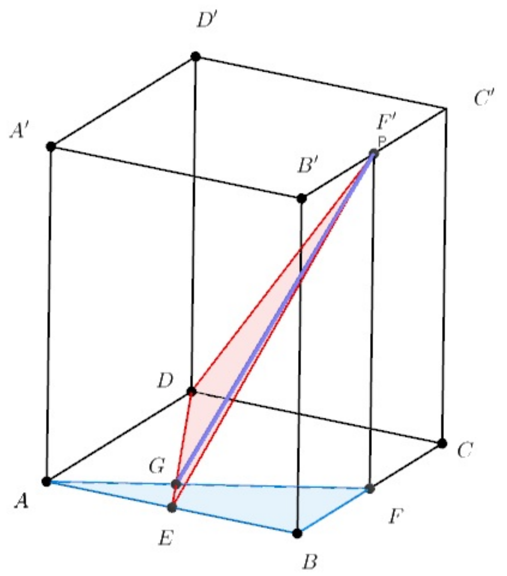
2. Jelöljük $|x_0 - x_1| = k$, ugyanakkor legyen $x_{2017} = x_0$. Ekkor
$$0 = x_0 - x_0 = x_0 - x_{2017} = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + ... + (x_{2016} - x_{2017}) = k\,(\pm 1 + \pm 1 + ... + \pm 1)\,,$$
ahol $\pm$ előjelek a szomszédok különbséga szerint van megválasztva. Tételezzük fel, hogy $k \neq 0$, ekkor a
$$\underbrace{(\pm 1 + \pm 1 + ... + \pm 1)}_{2017\text{db} \quad \pm 1} = 0,$$
ami ellentmondás. Tehát $k = 0$, ami azt jelenti, hogy minden szám egyenlő $x_0 = ... = x_{2016}$. Felhasználva, hogy
$$|x_0 + x_1 + ... + x_{2016}| = 2017,$$
azaz $x_j = \pm 1$, $j \in \{0, 1, 2..., 2016\}$.

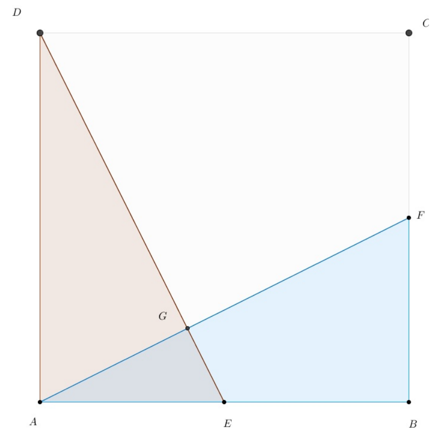
3. (a) A válasz igen.

   (b) Tegyük fel, hogy ez megvalósítható. Ekkor legyen d a 2×2 négyzetek száma, $2015 - d$ az 1×1 négyzetek száma. Ekkor a területek alapján
$$4d + 2015 - d = a^2, \quad \text{ahol} a \in \mathbb{N}.$$
   Azaz
$$3(d + 671) + 2 = a^2.$$
   Ami nem lehetséges, mert négyzetszám 3-mal való osztási maradéka nem lehet 2.

4. Igazoljuk, hogy van olyan sík amelyre ha levetítjük a tetraéder csúcsait egy paralelogrammát kapunk. Legyenek M az AD, és N a BC élek felezőpontjai. Tekintsük az α síkot, amely merőleges az MN-re. Erre a síkra levetítjük az $ABCD$ tetraéder csúcspontjait. Legyen $MN \cap \alpha = \{O\}$, valamint $A_1 = \mathrm{pr}_\alpha(A)$, $B_1 = \mathrm{pr}_\alpha(B)$, $C_1 = \mathrm{pr}_\alpha(C)$, $D_1 = \mathrm{pr}_\alpha(D)$. Világos, hogy az MN nem párhuzamos az AB-vel, hiszen ebben az esetben az A, B, C, D pontok koplanárisok lennének. Tehát az A és B pontokat különböző pontokba vetítettük ($A_1 \neq B_1$), hasonlóan $C_1 \neq D_1$. Mivel M az AD felezőpontja, világos, hogy O az A_1D_1 felezőpontja. Hasonlóan O a B_1C_1 felezőpontja, ami igazolja az állításunk.

5. Tekintsük az alábbi ábrát.





(a) Legyen $\{G\} = AF \cap DE$. Ekkor világos, hogy

$$ADE_\Delta \equiv ABF_\Delta.$$

A fenti két háromszög kongruenciája, maga után vonja, hogy

$$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BAF}).$$

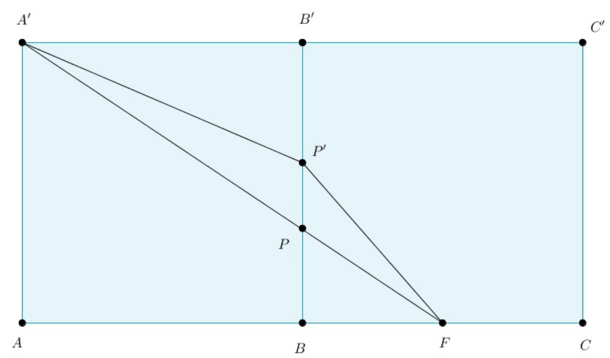
De $m(\widehat{ADE}) + m(\widehat{DEA}) = 90^o$, ezért $m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{DEA}) = 90^o$, ami pontosan azt jelenti, hogy $AF \perp DE$.

(b) Mivel $F'F \perp (ABC)$, $FG \perp DE$ a három merőleges tétele szerint $F'G \perp DE$, azaz

$$m(\widehat{ABC}, \widehat{F'DE}) = m(\widehat{F'GF}).$$

Látható, hogy $AF = \sqrt{6^2+3^2} = 3\sqrt{5}$, $AG = \frac{AE \cdot AD}{DE} = \frac{18}{3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. Látható, hogy $GF = AF - AG = 3\sqrt{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$, tehát

$$\mathrm{tg}\widehat{F'GF} = \frac{FF'}{GF} = \sqrt{5}.$$



(c) Az $ABB'A'$ és $BCC'B'$ lapokat a BB' mentén egy síkba forgatjuk. Világos, hogy

$$FPB_\Delta \sim FA'A_\Delta.$$

A fenti hasonlóságban a hasonlósági arány $\frac{1}{3}$. Tehát $PB = \frac{1}{3}AA' = 3$. A P pontra az $A'P + PF$ összeg minimális, mert A', P, F pontok kollineárisak. Bármilyen másik $P' \neq P$ esetén

$$A'P' + P'F > A'P + PF = A'F.$$

Tehát $BP = 3$.