$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXIII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2017. május 13.
V. osztály

1. Sári néni a piacon 100 db háromféle tojást vásárolt 100 RON értékben. Tudva azt, hogy a tyúktojás ára 50 bani, a libatojás 5 RON és a pulykatojás 10 RON, hány tojást vehetett mindenikből külön-külön ha mindenikből vásárolt tojást?

2. Télapó zsákjában 585 ezüst dió van. Egy iskola 10 különböző osztályában járva osztogatja őket úgy, hogy minden osztályban 1-gyel többet hagy mint az előtte lévőben . Minden gyerek pontosan 3 diót kap, a maradékot pedig az oztály tanító nénije viheti haza.
   (a) Hány diót kapott az első osztály?
   (b) Mekkora lehetett az osztályok létszáma?
   (c) Hány osztályban eshetett meg, hogy a tanító néninek nem jutott dió?

3. Legyen $X = \{1, 3, 5, 7, ..., 2n + 1, ...\}$ halmaz, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Felépítjük az $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3, 5\}$, $A_3 = \{7, 9, 11\}$, ... halmazokat (az elsőnek 1, a másodiknak 2, a harmadiknak 3 és így tovább eleme van).
   (a) Írjuk fel az A_4 és A_5 halmazokat.
   (b) Határozzuk meg az A_{20} halmaz elemeinek az összegét.

4. Határozzuk meg azokat az $\overline{abcd}$ alakú természetes számokat, amelyekre tudjuk, hogy a számjegyei egymást követő számok, illetve $a \cdot d = \overline{bc} : 2$.

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

XXIII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2017. március 13.
VI. osztály

1. Egy gépkocsi egy út $\frac{2}{3}$-át $80\frac{km}{h}$ sebességgel haladva egy órával hamarabb teszi meg, mint egy autóbusz ugyanannak az útnak a $\frac{3}{4}$-ét $60\frac{km}{h}$ sebességgel haladva.
   (a) Mekkora az egész út hossza?
   (b) Mennyi idő alatt teszi meg az egész utat a két jármű külön-külön, ha a sebességüket nem változtatják meg?

2. Az életkorom egy olyan kétjegyű prímszám, melyben a számjegyek összege egy olyan kétjegyű prímszám, amelyben a számjegyek összege egy teljes négyzet. Találjátok ki, mennyi idős vagyok.

3. Az ABC egyenlő oldalú háromszög külső tartományában megszerkesztjük az $ACMN$ és $ABQP$ négyzeteket. Az ABC háromszög területe 2017 cm^2. Határozd meg :
   (a) a PAN háromszög területét.
   (b) az $AECN$ négyszög és a $BCMNPQ$ hatszög területeinek arányát, ahol E az ABC háromszög BC oldalára húzott merőleges talppontja.

4. Adott az alábbi két szám:
$$a = \frac{7}{3\cdot 4} + \frac{8}{3\cdot 5} + \frac{9}{3\cdot 6} + ... + \frac{2020}{3\cdot 2017}$$
$$b = \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{3\cdot 6} + ... + \frac{2014}{3\cdot 2017}.$$
   Mutasd ki, hogy
$$\frac{3}{2014}(a+b)$$
   természetes szám.

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)\,dxdy$

XXIII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2017. május 13.
VII. osztály

1. Ha a, b, c, x, y, z olyan racionális számok amelyekre igazak az alábbi összefüggések:

$$a = xy + x + y,$$
$$b = yz + y + z,$$
$$c = zx + z + x.$$

Mutasd ki, hogy
$$\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)} \in \mathbb{Q}.$$

2. A hét napig tartó vakáció ideje alatt Ibolya minden nap felírta, hogy aznap hányadika van. Ezután a felírt számokat összeadta, és így 124-et kapott. Hányadikán kezdődött az iskola a vakáció után?

3. A nullától különböző x, y, z pozitív egész számok esetén
$$\frac{x\sqrt{2}+y}{y\sqrt{2}+z} \in \mathbb{Z}.$$
Határozd meg az $\frac{x+z}{y}$ arány legkisebb értékét.

4. Legyen P az ABC_{Δ} háromszög belsejének egy tetszőleges pontja. A P ponton keresztül párhuzamos egyeneseket húzunk a háromszög oldalaival: $QR \parallel AB$, $MN \parallel BC$ és $ST \parallel AC$, ahol T, $M \in AB$, R, $S \in BC$ és N, $Q \in AC$. Legyen $AS \cap BQ = \{E\}$, $BQ \cap CM = \{F\}$ és $CM \cap AS = \{G\}$. Igazold, hogy:
   (a) $\frac{BM}{AB} + \frac{CS}{BC} + \frac{AQ}{AC} = 1;$
   (b) $T_{BMC} + T_{CSA} + T_{AQB} = T_{ABC};$
   (c) $T_{BMF} + T_{CSG} + T_{AQE} = T_{EFG}.$

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXIII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2017. május 13.
VIII. osztály

---

1. Az életkorom egy olyan kétjegyű prímszám, melyben a számjegyek összege egy olyan kétjegyű prímszám, amelyben a számjegyek összege egy teljes négyzet. Találd ki, mennyi idős vagyok.

2. Az $a, b, c \in (0, 1]$ számokra teljesül az $a + b + c = 2$ egyenlőség. Bizonyítsd be, hogy
$$\frac{ab}{ab+1} + \frac{bc}{bc+1} + \frac{ca}{ca+1} < 1.$$

3. Minden n természetes szám esetén legyen
$$N(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) + 120.$$
   (a) Igazold, hogy $N(n)$ osztható $n+5$-el minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.
   (b) Igazold, hogy létezik, olyan n természetes szám, amelyre $\frac{N(n)}{n}$ teljes négyzet.

4. Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest méretei $AB = a$, $AD = b$ és $AA' = c$. Legyenek $AE = x$, $E \in A'D$, $AF = y$, $F \in A'B$ és $AG = z$, $G \in BD$, az A csúcsnak az $A'D$, $A'B$ és BD lapátlóktól való távolságai, H pedig az A pontnak az $A'BD$ síkra eső vetülete.
   (a) Igazold, hogy H az $A'BD$ háromszög magasságpontja!
   (b) Határozd meg a téglatest méreteit az x, y és z függvényében!

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXIII. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2017. május 13.
Megoldások

V. osztály

1. Legyen x, y, z a tyúk, liba illetve pulykatojások száma , így $x + y + z = 100$ illetve $0,5x + 5y + 10z = 100$. Tehát
$$x/2 + 5y + 10z = 100.$$
Azaz
$$x + 10y + 20z = 200$$
Ez azt jeletni, hogy $x \in \{10, 20, 30, \ldots, 90, 100\}$. Innen probálgatásokkal megkapjuk a megoldást:
$$x = 90, y = 9, z = 1.$$

2. (a) Legyen a következő jelölések I.oszt.: x, II. oszt.: $x + 1$, III. oszt.: $x + 2$, ... X. oszt.: $x + 9$. (A felírás történhet szakaszokkal is.) Ekkor összesen:
$$10x + 1 + 2 + ... + 9 = 585$$
azaz
$$10x + 45 = 585$$
amiből adódik, hogy $x = 54$. Az első osztály összesen 54 diót kapott.

   (b) Az osztályok létszámát megkapjuk, ha az osztály dióinak számát elosztjuk 3-mal. Lásd az alábbi táblázatot:

Oszt.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
Diók	54	55	56	67	58	59	60	61	62	63
Oszt. létszám	18	18	18	19	19	19	20	20	20	21
Maradék Diók sz.	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

   (c) A tanító néniknek megmaradt diók számát az osztások maradéka határozza meg. A táblázatból kitűnik, hogy 4 osztály tanító nénijének nem jut egyetlen dió sem.

3. (a) $A_4 = \{13, 15, 17, 19\}$, $A_5 = \{21, 23, 25, 27, 29\}$.

   (b) Észrevehetjük, hogy $13 = 3 \cdot 4 + 1$, $21 = 4 \cdot 5 + 1$ stb. Tehát felírhatjuk, hogy
$$A_{20} = \{19 \cdot 20 + 1, 19 \cdot 20 + 3, 19 \cdot 20 + 5, ..., 19 \cdot 20 + 39\}.$$
Ekkor az A_{20} elemeinek az összege:
$$19 \cdot 20^2 + 1 + 3 + 5 + ... + 39 = 19 \cdot 20^2 + 20^2 = 20^3.$$

4. A feladat feltételeit felhasználva világos, hogy

$$\begin{cases} a+1=b \\ b+1=c \\ c+1=d \\ a\cdot d=\overline{bc}:2 \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} b=a+1 \\ c=a+2 \\ d=a+3 \\ 2a\cdot d=10b+c \end{cases}.$$

Ekkor

$$2a(a+3)=10(a+1)+a+2$$
$$2a^2-5a-12=0,\ a\in\{1,2,3,..9\}.$$

Tehát láthatjuk, hogy csak az $a=4$ megoldás. Így a keresett szám 4567.

VI. osztály

1. (a) Legyen x az egész út hossza, t pedig a gépkocsi által az út $\frac{2}{3}$-ának megtételéhez szükséges idő. Ekkor

$$\frac{2}{3}x=80t.$$

Az autóbusz esetén:

$$\frac{3}{4}x=60(t+1).$$

Az első összefüggés alapján

$$x=\frac{3}{2}\cdot 80t=120t,$$

míg a második alapján

$$x=80(t+1).$$

Ekkor

$$120t=80(t+1),$$

ahonnan kapjuk, hogy $t=2h$. Tehát $x=120\cdot 2=240$km.

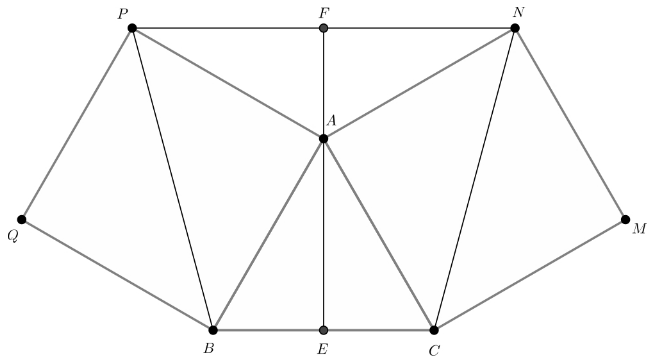
(b) A gépkocsi $240:80=3$ óra alatt teszi meg az egész utat. Az autóbusz $240:60=4$óra alatt teszi meg az egész utat.

2. Világos, hogy egy $\overline{ab}$ esetén az $a+b$ összeg 2 és 18 között mozog. Tehát mivel a feladat feltételei alapján $a+b$ egy kétjegyű prímszám ezért

$$a+b\in\{11,13,17,19\}.$$

Ekkor az egyetlen lehetséges eset, hogy az így kapott szám számjegyeinek az összege teljes négyzet legyen az a 13. Tehát $\overline{ab}\in\{49,58,67,76,85,94\}$. Ezen számok közül csak a 67 prímszám. Tehát a keresett életkor 67.

3. Tekintsük az alábbi ábrát.



(a) Legyen $AF \perp PN$. Világos, hogy a PAN háromszög egyenlőszárú. Tehát

$$m\left(\widehat{FNA}\right) = 30^o \text{ és } FA = EC = \frac{BC}{2}.$$

Ekkor könnyen észrevehető, hogy

$$FAN_\Delta \equiv AEC_\Delta.$$

Így

$$T_{ABC_\Delta} = 2T_{AEC_\Delta} = 2T_{FAN_\Delta} = T_{PAN_\Delta} = 2017cm^2.$$

(b) Világos, hogy

$$T_{AECN} = \frac{T_{ABC_\Delta} + T_{ACMN_\Box}}{2},$$

valamint

$$T_{PQBCMN} = T_{ACMN_\Box} + T_{APQB_\Box} + T_{ABC_\Delta} + T_{APN_\Delta} = 2T_{ACMN_\Box} + 2T_{ABC_\Delta}.$$

Tehát

$$\frac{T_{AECN}}{T_{PQBCMN}} = \frac{1}{4}.$$

4. Észrevehető, hogy

$$\begin{aligned} a &= \frac{3+4}{3\cdot 4} + \frac{3+5}{3\cdot 5} + \frac{3+6}{3\cdot 6} + ... + \frac{3+2017}{3\cdot 2017} \\ &= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) + ... + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2017}\right) \\ &= \frac{2014}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2017}. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{3\cdot 6} + ... + \frac{2014}{3\cdot 2017} \\ &= \frac{4-3}{3\cdot 4} + \frac{5-3}{3\cdot 5} + \frac{6-3}{3\cdot 6} + ... + \frac{2017-3}{3\cdot 2017} \\ &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) + ... + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2017}\right) \\ &= \frac{2014}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - ... - \frac{1}{2017}. \end{aligned}$$

Ekkor

$$a + b = 2\cdot\frac{2014}{3},$$

azaz

$$\frac{3}{2014}(a+b) = 2 \in \mathbb{N}.$$

VII. osztály

1. Világos, hogy

$$\begin{aligned} a+1 &= xy+x+y+1=(x+1)(y+1) \\ b+1 &= (y+1)(z+1) \\ c+1 &= (x+1)(z+1). \end{aligned}$$

Tehát

$$(a+1)(b+1)(c+1)=(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2.$$

Ekkor

$$\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}=|x+1||y+1||z+1|\in\mathbb{Q}.$$

2. Mivel hét egymásutáni természetes szám összege osztható 7-tel, 124 viszont nem osztható 7-tel, ezért a vakáció egyik hónap utolsó napjára és a következő hónap első napjaira esett. A hónapok 28,29,30 vagy 31 naposak. Mivel $1+2+3+4=10$ és $29+30+31<124-10$, ezért az első hónapból háromnál több nem esett a vakáció idejére. Mivel $24+25+26+27+28>124$, ezért az első hónapból ötnél kevesebb nap esett a vakáció idejére. Tehát az első hónapból négy, a másodikból pedig 3 nap esett a vakációra, így az iskola negyedikén kezdődött. (Valóban ha az első hónap 31 napos, teljesülnek a feltételek: $28+29+30+31+1+2+3=124$.)

3. A feladat feltételei alapján

$$\frac{y+\sqrt{2}x}{y\sqrt{2}+z}=k\in\mathbb{Z},$$

ekkor

$$x\sqrt{2}+y=ky\sqrt{2}+kz.$$

Átrendezve a fenti összefüggést

$$\sqrt{2}(x-ky)=kz-y \Leftrightarrow \begin{cases} x-ky=0 \\ kz-y=0 \end{cases}.$$

Tehát

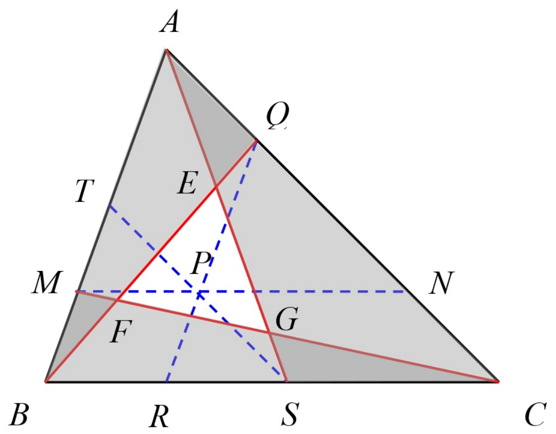
$$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=k\Leftrightarrow xz=y^2.$$

Ekkor

$$\frac{x+z}{y}=\frac{x+z}{\sqrt{xz}}\geq 2.$$

Tehát a keresett minimum 2 (ez el is érődik, ha $x=z$).

4. Tekintsük a következő ábrát



(a) Az oldalakkal párhuzamos egyenesek a háromszög oldalaival hasonló háromszögeket és paralelogrammákat alkotnak.

$$TMP_\Delta \sim ABC_\Delta \sim PRS_\Delta \sim QPN_\Delta,$$

mert megfelelő szögei kongruensek, mivel párhuzamos szárú szögek:

$$\widehat{TMP} \equiv \widehat{ABC} \equiv \widehat{PRS} \equiv \widehat{QPN}$$

és

$$\widehat{MTP} \equiv \widehat{BAC} \equiv \widehat{RPS} \equiv \widehat{PQN}.$$

A $BRPM$, $SCNP$ és $ATPQ$ paralelogrammák, mert a szemben fekvő oldalai párhuzamosak egymással. Felírhatjuk a megfelelő oldalak arányát:

$$\frac{PR}{AB} = \frac{RS}{BC}.$$

de $[PR] \equiv [MB]$ tehát

$$\frac{BM}{AB} = \frac{RS}{BC} \tag{1}$$

Az ABC_Δ háromszögben $QR \parallel AB$, Thalész tételéből következik, hogy:

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{BR}{BC}. \tag{2}$$

Az (1), (2) alapján

$$\frac{BM}{AB} + \frac{CS}{BC} + \frac{AQ}{AC} = \frac{RS}{BC} + \frac{CS}{BC} + \frac{BR}{BC} = 1.$$

(b) A BMC_Δ és ABC_Δ háromszögek C-ből húzott magasságai egybeesnek, következik, hogy

$$\frac{T_{BMC_\Delta}}{T_{ABC_\Delta}} = \frac{BM}{AB}. \tag{3}$$

Hasonlóan felírhatjuk, hogy

$$\frac{T_{CSA_\Delta}}{T_{ABC_\Delta}} = \frac{CS}{BC} \tag{4}$$

és

$$\frac{T_{AQB_\Delta}}{T_{ABC_\Delta}} = \frac{AQ}{AC}. \tag{5}$$

A (3), (4) és (5) egyenlőségek megfelelő oldalait összeadva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{T_{BMC_\Delta}}{T_{ABC_\Delta}} + \frac{T_{CSA_\Delta}}{T_{ABC_\Delta}} + \frac{T_{AQB_\Delta}}{T_{ABC_\Delta}} = \frac{BM}{AB} + \frac{CS}{BC} + \frac{AQ}{AC} = 1.$$

Az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk az (a) pontot. Ezzel a bizonyítandó állítást kaptuk:

$$T_{BMC} + T_{CSA} + T_{AQB} = T_{ABC.} \tag{6}$$

(c) Az ábrát követve megállapíthatjuk, hogy ha a BMC, CSA és AQB háromszögek területeit az EFG háromszög területével összeadva, megkapjuk az ABC, BMF, CSG és AQE háromszögek területeinek összegét(a BMF, CSG és AQE háromszögek két-két háromszög közös részei):

$$T_{BMC} + T_{CSA} + T_{AQB} + T_{EFG} = T_{ABC} + T_{BMF} + T_{CSG} + T_{AQE}. \tag{7}$$

A (7) és (6) egyenlőségek megfelelő oldalainak különbsége éppen a kívánt összefüggést adja.

VIII. osztály

1. Világos, hogy egy $\overline{ab}$ esetén az $a+b$ összeg 2 és 18 között mozog. Tehát mivel a feladat feltételei alapján $a+b$ egy kétjegyű prímszám ezért

$$a+b \in \{11, 13, 17, 19\}.$$

Ekkor az egyetlen lehetséges eset, hogy az így kapott szám számjegyeinek az összege teljes négyzet legyen az a 13. Tehát $\overline{ab} \in \{49, 58, 67, 76, 85, 94\}$. Ezen számok közül csak a 67 prímszám. Tehát a keresett életkor 67.

2. Felírható, hogy

$$\sqrt{ab} \le \frac{ab+1}{2} \Rightarrow \frac{ab}{ab+1} \le \frac{\sqrt{ab}}{2} \le \frac{a+b}{4}.$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} \frac{bc}{bc+1} &\le \frac{b+c}{4} \\ \frac{ac}{ac+1} &\le \frac{a+c}{4}. \end{aligned}$$

Összegezve a három egyenlőtlenséget és figyelembe véve, hogy $a+b+c=2$, kapjuk, hogy

$$\frac{ab}{ab+1} + \frac{bc}{bc+1} + \frac{ac}{ac+1} \le \frac{2(a+b+c)}{4} = 1.$$

Az egyenlőség nem teljesülhet mert, az $a=b=c=1$ számok nem teljesítik az $a+b+c=2$ feltételt.

3. (a) Átalakításokkal, kaphatjuk, hogy

$$\begin{aligned} N(n) &= n\left[(n^2+5n)+4\right] \cdot \left[(n^2+5n)+6\right] + 120 \\ &= n\left[(n^2+5n)^2 + 10(n^2+5n) + 24\right] + 120 \\ &= n^3(n+5)^2 + 10n^2(n+5) + 24n + 120 \\ &= n^3(n+5)^2 + 10n^2(n+5) + 24(n+5) \\ &= (n+5)\left[n^3(n+5) + 10n^2 + 24\right]. \end{aligned}$$

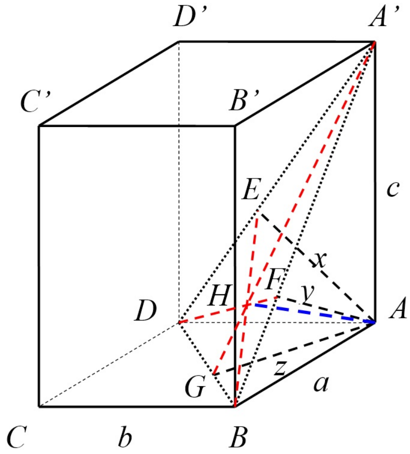
Ami igazolja az állítást.

(b) Négy egymást követő szám szorzatát megnöveljük 1-el, akkor teljes négyzetet kapunk. Valóban,

$$\begin{aligned} s(s+1)(s+2)(s+3)+1 &= (s^2+3s)(s^2+3s+2)+1 \\ &= (s^2+3s)^2 + 2(s^2+3s) + 1 \\ &= (s^2+3s+1)^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Ekkor válasszuk $n = 120$-t, így

$$\begin{aligned} \frac{N(n)}{n} &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+120}{n} \\ &= \frac{120 \cdot 121 \cdot 122 \cdot 123 \cdot 124 + 120}{120} \\ &= 121 \cdot 122 \cdot 123 \cdot 124 + 1 \\ &\overset{(8)}{=} 150005^2. \end{aligned}$$



(a) Mivel $AA' \perp (ABD)$ és $AG \perp BD$ ezért a három merőleges tétele alapján $A'G \perp BD$. Legyen $AH' \perp A'G$, $H' \in A'G$. Mivel $AG \perp BD$, és $AH' \perp A'G$ a három merőleges tételének 2. fordított tételéből következik, hogy

$$AH' \perp (A'BD),$$

tehát $H = H'$. Felhírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} AH &\perp (A'BD) \\ AE &\perp A'D \end{aligned}$$

tehát a három merőleges tétele alapján

$$HE \perp A'D. \tag{9}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} BA &\perp (ADA') \\ AE &\perp A'D \end{aligned}$$

tehát a három merőleges tétele alapján

$$BE \perp A'D. \tag{10}$$

Az (9) és (10) összefüggésekből következik, hogy $H \in BE$. Az $A'G$, DF és BE az $A'BD$ háromszög magasságai, így H az $A'BD$ háromszög magasságpontja.

(b) Mivel $AE \perp A'D$, $AF \perp A'B$ és $AG \perp BD$ felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} A'D &= \sqrt{b^2 + c^2} \\ A'B &= \sqrt{a^2 + c^2} \\ BD &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Az $A'AD$ derékszögű háromszögben magasság

$$AE = \frac{AD \cdot AA'}{A'D} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Azt kapjuk, hogy:

$$x = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$$
$$y = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$$
$$z = \frac{ba}{\sqrt{b^2+a^2}}.$$

Innen

$$x^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2},\ y^2 = \frac{a^2c^2}{a^2+c^2},\ z^2 = \frac{b^2a^2}{a^2+b^2},$$

vagy

$$\frac{1}{x^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$
$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$$
$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Tehát

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{z^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2}{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}} \\ b^2 = \frac{2}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{y^2}} \\ c^2 = \frac{2}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{2}{\left|\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right|}} \\ b = \sqrt{\frac{2}{\left|\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{y^2}\right|}} \\ c = \sqrt{\frac{2}{\left|\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right|}} \end{cases} .$$