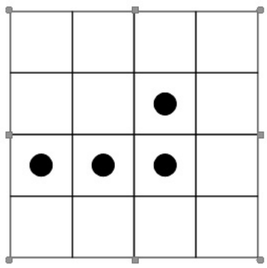
$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXIV. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2018. május 12.
IV. osztály

1. Egy turista első nap megtette útjának $\frac{17}{23}$ részét és második nap a megmaradt 156 kilométert. Hány km-t tett meg a turista a két nap alatt?

2. Egy székely kapura a fafaragó más-más árat kért egy magánhangzó, illetve egy mássalhangzó bevéséséért. (A különböző magánhangzók bevésése ugyanannyiba kerül, illetve a különböző mássalhangzóké is.) Ha az ANNA névért 50 lejt, az ANDRÁS névért pedig 80 lejt kért, akkor mennyibe került a ZSUZSANNA név bevésése? (A ZS betű két mássalhangzó bevésését jelenti.)

3. A rajz egy telek alaprajza, amelyen 4 kút van. Hogyan lehet a telket négy ugyanakkora és ugyanolyan alakú részre felosztani, hogy mindegyiken egy-egy kút legyen?



4. A 7 törpe házikójában valaki eltört egy tányért. Hófehérkének így számoltak be a történtekről:

   Tudor: Nem Szundi volt. Én voltam.
   Morgó: Nem én voltam. Nem Hapci volt.
   Vidor: Tudor volt. Nem Morgó volt.

   Ki törte el a tányért, ha a törpék egyik állítása igaz, a másik hamis?

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

$\iint\limits_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXIV. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2018. május 12.
V. osztály

---

1. Határozzuk meg az x természetes számot, amely megoldása a következő egyenletnek

$$\frac{2009}{x+1} + \frac{2010}{x+2} + ... + \frac{2018}{x+10} = 10.$$

2. András és Balázs beváltotta a félretett zsebpénzét euróba. Ezután összevetették vagyonkájukat és csodálkozva vették észre, hogy ha András 10 eurót adna Balázsnak, akkor neki csak fele annyi pénze lenne mint Balázsnak, de ha Balázs adna 10 eurót Andrásnak, akkor ugyanannyi pénzük lenne. Hány eurójuk van összesen?

3. Igazoljuk, hogy

$$\left(2^{2018} - 2^{2017}\right) \cdot \left(2^{2017} - 2^{2016}\right) \cdot ... \cdot (2^1 - 1) = \left(2^{2017}\right)^{1008}.$$

4. Írjátok fel a $\frac{100}{101}$ törtet 100 db tört összegeként, ha a törtek számlálója 1 és nevezőik különböznek.

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXIV. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2018. május 12.
VI. osztály

1. Adottak az a, b, c prímszámok amelyek egyidőben teljesítik a következő feltételeket:

   (a) $a < b < c$;

   (b) $a^c + c^b + b^a = 480$.

   Határozzuk meg az $a^b + b^c + c^a$ összeget.

2. Az $m\left(\widehat{AOB}\right)$ és $m(\widehat{BOC})$ egymás melletti szögek. Az $\widehat{AOB}$ szögfelezője OC-vel derékszöget és a $\widehat{BOC}$ szögfelezője OA-val 120 fokos szöget alkot. Határozzuk meg az $\widehat{AOC}$ szög mértékét!

3. Adott 5 pont úgy, hogy bármely három pont nem kollineáris. Az öt pont által alkotott szakaszok mindenikét kiszínezzük pirosra, zöldre vagy kékre. Igazoljuk, hogy létezik legalább négy szakasz mely ugyanazzal a színnel van kifestve.

4. Az $1, 2, 3, ..., 9$ számok valamilyen más sorrendjét az $a_1, a_2, ..., a_9$ jelöli. Lehet-e páratlan az

   $$(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot .... \cdot (a_9 - 9)$$

   szorzat?

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

$\iint_\Sigma V(p,q)dxdy$

XXIV. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2018. május 12.
VII. osztály

---

1. Igazoljuk, hogy az $a, b, c > 0$ számok esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{abc}}.$$

2. Az $1, 2, 3, ..., 9$ számok valamilyen más sorrendjét az $a_1, a_2, ..., a_9$ jelöli. Lehet-e páratlan az
$$(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot .... \cdot (a_9 - 9)$$
szorzat?

3. Adottak az $a, b, c \in \mathbb{Q}$ számok, amelyekre
$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}.$$
Bizonyítsuk be, hogy:
   (a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbb{Q}$.
   (b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. Határozzuk meg az A-ban derékszögű háromszög szögeinek mértékét fokokban, ha az oldalak hosszaira teljesül az
$$(AB - AC)^2 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right) AB \cdot AC.$$

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 5 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)\,dx\,dy$

XXIV. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2018. május 12.
VIII. osztály

1. Adott az [ABCD] tetraéder. Ha a $\widehat{CAD}$ és $\widehat{CBD}$ két tompaszög, igazoljuk, hogy
$$|CD| > |AB|.$$
2. Írjuk fel a $\frac{100}{101}$ törtet 100 db tört összegeként, ha a törtek számlálója 1 és nevezőik különböznek.
3. Adottak a, b, c pozitív valós számok, úgy, hogy $a + b + c = 1$. Igazoljuk, hogy
$$4(ab + ac + bc) \leq 9abc + 1.$$
4. Egy körön felveszünk 16 pontot egyenlő távolságra egymástól. A pontokat két színnel színezzük ki, véletlenszerűen, de úgy, hogy mindenik színből ugyanannyi szerepeljen. Igazoljuk, hogy mindenik színnek megfelelően kiválasztható egy-egy háromszög, úgy, hogy a kapott két darab háromszög kongruens legyen.

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.