XXV. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2019. május 11.

IV. osztály

1. Huba egy sorozatot írt a füzetébe. A 13-ast írta fel először, majd ezután mindig az utolsó szám számjegyeinek összegét 7-tel szorozva kapta meg a sorozat következő tagját. Eddig a 13, 28, 70 számokat írta le. Melyik szám lesz a sorozat 100. tagja?

2. Egy tehergépkocsinak összesen 1700kg burgonyát kell kiszállítania három üzletbe. Minden szállításnál megmérik a rakomány tömegét az autóval együtt. Az első alkalommal a mérleg 2122kg-ot, a második szállítmánynál 2800kg-ot, míg a harmadiknál 3000kg-ot mutat. Hány kg a tehergépkocsi tömege?

3. Egy könyvesszekrény két polcán összesen 150 könyv van. Ha az alsó polcról 18 könyvet áttennénk a felsőre, akkor a felsőn kétszer annyi könyv lenne, mint amennyi az alsó polcon volt eredetileg. Hány könyv volt eredetileg a felső és az alsó polcon külön-külön?

4. Anna a táblára felírt 5 páratlan és 8 páros számot. Petivel azt játszák, hogy letörölnek két számot és helyette egy másikat írnak a következő szabály szerint: ha mindkettő páros volt, vagy mindkettő páratlan, akkor írnak helyette egy páros számot, ha egy páros és egy páratlan számot törölnek le, akkor írnak helyette egy páratlan számot. Milyen szám marad utoljára a táblán, páros vagy páratlan?

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

$\iint\limits_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXV. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2019. május 11.

V. osztály

1. Határozzuk meg az $\overline{ab}$ számot, tudva, hogy

$$32^{\overline{ab}} = 64^{\overline{ba}}.$$

2. Anita és Béla a következő üveggolyós játékot játsszák: az első fordulóban Anita kiveszi a golyók felét, Béla a megmaradt golyók felét, és így tovább. Addig folytatják, amíg csak 1 golyó marad. Aki az utolsót kiveszi, az nyer. Hány golyó volt eredetileg, ha a játékot Béla nyeri meg a negyedik fordulóban?

3. Egészítsük ki az alábbi táblázatot úgy, hogy minden sorban, oszlopban és az átlók mentén a számok összege ugyanaz legyen

	21	14
		19
20		

4. Igazoljuk, hogy a kétjegyű számok közül akárhogyan választunk ki 20 számot, mindig lesz a kiválasztott számok között kettő, melyekben a számjegyek összege azonos.

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXV. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2019. május 11.
VI. osztály

---

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ paralelogrammában az AE és BE szögfelezők a DC oldalon metszik egymást, akkor $[AB] = 2[BC]$.

2. Adott az $A = \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots, 105\}$ halmaz. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz bármilyen 15 elemű részhalmaza tartalmaz két olyan számot, melyek összege osztható 22-vel.

3. Bizonyítsuk be, hogy
$$1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{2019}$$
összeg osztható 5-el és 25-el is.

4. Az ABC háromszögben $m(\widehat{BAC})$ kisebb mint $120°$. A háromszög külső tartományába megszerkesztjük a BCA', ACB' és ABC' egyenlő oldalú háromszögeket. Legyen M a BB' és CC' metszéspontja.
   a) Mutassuk ki, hogy $BB' = CC'$.
   b) Számítsuk ki a következő összeget
   $$m(\widehat{MBA'}) + m(\widehat{MCA'}).$$

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXV. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2019. május 11.

VII. osztály

1. Az egész számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletet

$$x^2 + y^2 = x + y + 18.$$

2. Az ABC háromszögben $m(\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tudva, hogy $2AB = 3AC$, igazoljuk, hogy

$$2AB^2 = AC^2 + 2BC^2.$$

3. Határozzuk meg azokat az x és y természetes számokat, $x > y$, amelyeknek 3 természetes osztójuk van, valamint az $y - x$ különbségnek 4 természetes osztója van.

4. Az $ABCD$ trapézban, $AB \parallel CD$. Legyen M a CD oldal és N az AB oldal felezőpontja. $\{P\} = BM \cap AC$, $\{Q\} = DN \cap AC$. Tudva, hogy $QP = PC$, igazoljuk, hogy

$$PQ = QA.$$

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.

$\iint_{\Sigma} V(p,q)dxdy$

XXV. Vályi Gyula Emlékverseny
Marosvásárhely
2019. május 11.
VIII. osztály

1. (a) Igazoljuk, hogy nem léteznek x, y természetes számok úgy, hogy $x + 4^y = x^3$.

   (b) Határozzuk meg az x, y természetes számokat úgy, hogy $x + 6 \cdot 4^y = x^3$.

2. Tekintsük a következő számokat:

$$101,\ 10101,\ 1010101,\ \ldots\ \underbrace{101...01}_{2019 \text{ db } 1-es}.$$

   Bizonyítsuk be, hogy van olyan szám a fentiek között, amely osztható 2019-el.

3. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok körében

$$x^4 + y^4 = 30x^2 + 30y^2 + 27.$$

4. Adott az $ABCD$ négyzet. Az A pontba merőlegest húzunk az ABC síkra úgy, hogy $MA = 2019$. Tudva, hogy MBD háromszög egyenlő oldalú:

   a) határozzuk meg az $ABCD$ négyzet oldalát.

   b) határozzuk meg $\cos\left(\widehat{(MBD),(ABD)}\right)$-t.

   c) igazoljuk, hogy ha NO merőleges az ABC síkra, ahol N az MC szakasz felezőpontja, O pedig az $ABCD$ négyzet középpontja.

Munkaidő 2 óra. Minden feladat 9 pontot ér. Hivatalból 4 pont szerezhető.