V. Vályi Gyula Emlékverseny
1999. március 19-21.

VI. osztály

1. Egy gazdasszony egy kosár tojást vitt a piacra. Hány tojás volt a kosárban, ha az első vásárló megvette a tojásoknak a felét és még egy fél tojást., második vásárló megvette a megmaradt tojások felét és még egy fél tojást, a harmadik vásárló pedig a megmaradt tojás felét és még egy tojást és még maradt a kosárban 4 tojás? (egyetlen tojást sem törtek el!)

2. Egy hajó hosszának, a hajókapitány életkorának és gyerekei számának szorzata 11877. Mindhárom egész szám. Hány éves a kapitány?

3. Egy osztályban fiúk és lányok számainak aránya 9:8. Ha az osztályból kihívnak 6 fiút a bennmaradt fiúk és lányok számainak aránya 3:4-re változik. Hány fiú és hány lány van az osztályban?

4. Igazoljuk, hogy ha $n \in N$, akkor a $\dfrac{3n+4}{4n+5}$ törtet nem lehet egyszerűsíteni!

5. Az *AB* egyenesen, az *A* és *B* pontok között vegyük fel az *O* pontot, majd az *AB* egyenes azonos oldalán húzzuk meg az *OC* és *OD* félegyeneseket úgy, hogy *OC* a *BOD* szög szárai között legyen. Mit mondhatunk az így keletkezett *BOC*∡, *COD*∡ és *DOA* ∡ szögekről?
   a).Lehet-e mindháromnak a mértéke kisebb, mint $45°$? Miért?
   b).Lehet-e mindhárom derékszög? Miért?
   c).Lehet-e közülük kettő tompaszög? Miért?
   Ha $m(COD)∢ = 2 \cdot m(BOC)∢$ és *OD* szögfelezője a *COA* szögnek, határozzuk meg a *BOC*∡, *COD*∡, és *DOA*∡ szögek mértékszámait!

1. Adottak a következő számok:

$$a = \sqrt{192} + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \sqrt{12} + 3\sqrt{18} - \frac{5\sqrt{160}}{2\sqrt{5}} - \sqrt{48}$$

$$b = \frac{6\sqrt{15} + 2\sqrt{10}}{\sqrt{20}}$$

Számítsuk ki a két szám számtani és mértani középarányosát!

2. Két prímszám összegének és különbségének a szorzata 165. Melyik ez a két szám?

3. Az $1 * 9 * 9 * 2$ kifejezésben mindegyik csillag (*) helyére írjuk be a négy alapművelet jelének valamelyikét (egy jelt lehet többször is használni). Mennyi az így képezhető legnagyobb és legkisebb számok összege?

4. Egy bolygón az általunk ismert négy alapműveleten kívül létezik egy ötödik is, melynek jele $\oplus$. Ez a művelet két tetszőleges x és y számhoz hozzárendeli az $x \oplus y = x^2 + y^2 - 2xy$ számot. Mennyivel egyenlő $-2 \oplus -3$?

5. Egy *ABCD* derékszögű trapézban $\mathrm{CD} \parallel \mathrm{AB}$, $\mathrm{m}(\hat{\mathrm{D}}) = 90°$ *CD* = 6 cm, *AB* = 4 cm, $m(\hat{C}) = 60°$. Számítsuk ki az *ABCD* trapéznak és az *MAB* háromszögnek a kerületét, ahol $\{M\} = AD \cap BC$

6. Az *ABCD* paralelogramma *AB* oldala kétszer olyan hosszú mint az *AD* oldal és a közbezárt szög mértéke $60°$. Legyen *BEFC* egy rombusz, ahol az E pont az AB szakasznak a B-n túli meghosszabbításán fekszik. Melyik szakasz hosszabb, a *[BD]* vagy *[BF]*?

7. Az *ABCD* egyenlőszárú trapéz átlói merőlegesek egymásra (*AB* a nagyalap $[\mathrm{AD}] \equiv [\mathrm{BC}]$). Meghúzzuk a trapéz *DM* magasságát ($M \in AB$). Igazoljuk, hogy $[MB] \equiv [DM]$!

1. Határozzátok meg azt a két természetes számot amelyek köbeinek különbsége 1951!

2. Adottak az $f_1 : R \to R; \quad f_1(x+1) = x-1$ és

$f_2 : R \to R; \quad f_2(2x) = x+2$ függvények

a) Határozzuk meg az f_1 és f_2 függvényeket.!

b) Ábrázoljuk ugyanabban a koordináta rendszerben!

c) Határozzuk meg az f_2 függvény grafikus képe és az Ox tengely metszéspontjának koordinátáit

d) Határozzuk meg a két függvény közös pontjának a koordinátáit!

e) Ellenőrizzük, hogy osztható-e a

$$\mathrm{P(x)} = (\mathrm{x}-3)^{1997} + (\mathrm{x}-1)^{1998} + (\mathrm{x}-2)^{1999} + (2-\mathrm{x})^{2000}$$

polinom f_1 (x) -el.

3. Hozzuk legegyszerűbb alakra a

$P(x) = x + |x+y| - \sqrt{y^2 - 4y + 4} - |-2y|$ polinomot, ha $x, y \in R$, $x < 0, y < |x|$. Hány eset lehetséges?

4. Legyen $P(x) = (x-1)^6 + mx^3 + n, \quad m, n \in R$. Számítsuk ki m és n értékét úgy, hogy $P(x)$ osztható legyen $(x-2)$ -vel és együtthatóinak algebrai összege 14 legyen!

5. Az n mely természetes szám értékeire igaz a következő egyenlőség?

$$\frac{n^2 - n - 1}{3n^2 - 3n - 2} = \frac{1}{4}$$

6. A d_1 és d_2 térbeli egyenesek az A pontban metszik egymást. A d_1 egyenes az α síkot a B pontban, a d_2 egyenes az α síkot C pontban metszi. A d_1 egyenes és az α sík által bezárt szög $30°$-os míg d_2 és α sík által bezárt szög mértéke $45°$. Határozzuk meg az α sík valamint a d_1 és d_2 egyenesek által alkotott sík lapszögének mértékét! Számítsuk ki az *ABC* háromszög területét, ha az *A* pont távolsága az α síktól $AA' = a$!

7. Számítsuk ki mértékszámait, majd rajzoljuk le pontosan (mértékek beosztásával) annak a hasábnak a hálózatát, amelynek az alapja egy *ABCD* derékszögű trapéz. A trapéz ***A*** szöge derékszög, ***B*** szöge $60°$-os, a $2\sqrt{3}$ cm-es ***AC*** átló pedig merőleges a ***BC*** oldalra. A hasáb magassága 5 cm.

8. Az *A, B, C* és *D* nem ugyanabban a síkban fekvő pontok, $AB \perp BC$, $BC \perp CD$ és $CD \perp DA$. Legyen *M* az *A* pont merőleges vetülete a *(BCD)* síkra.
a) Igazoljuk, hogy *BCDM* négyszög téglalap!
b) Mi a feltétele annak, hogy négyzet legyen?
c) Határozzuk meg annak az *O* pontnak a helyét, amely egyenlő távolságra van az *A*, *B*, *C*, *D* és *M* pontoktól!