X. Vályi Gyula Emlékverseny
2003 november 29

V osztály

1.
a) Igazoljuk, hogy az $a = 2003 + 2 \times (1 + 2 + 3 + ... + 2002)$ négyzetszám.

b) Mutassuk ki, hogy $b = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times 2003 + 7^{2003}$ nem lehet négyzetszám.

2. Pisti egy könyv vásáron 7 azonos értékű könyvet szeretett volna vásárolni, de csak 2 könyvre való pénze volt. Hány féleképpen választhatta ki a 7 könyvből a 2-öt?

3. Számítsátok ki azon kétjegyű számok összegét, amelyeknek 13-mal való osztási maradéka 11.

4. Pista 3 kg szilvát és 4 kg körtét 100000 lejért vásárolt. Ugyanakkor Imre 7 kg szilváért és 6 kg körtéért 180000 lejt fizetett. Mennyit fizetett Klári, ha ő 2 kg szilvát és 3 kg körtét vásárolt?

1. Írjátok növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$a = 8^2 + 4^{43} - 5 \times 2^{85}$$

$$b = (3^{25} \times 20^4) : (3^7 \times 2^{24} \times 5^{12})$$

$$c = \{5 + 5 \times [2^{3^4} : (2^{3^2})^9 + 1^{2^{3^4}}] - 2\}^{21}$$

2.

a) Határozzátok meg az **a, b, c** számjegyeket ha $n = \overline{abcabc}$ számnak a lehető legkevesebb osztója van és $\overline{abcabc}$ a lehető legkisebb ilyen szám.

b) Mennyi ebben az esetben az n szám osztóink száma?

3. Adott egy $19°$-os szög. Csak körző és beosztás nélküli vonalzóval hogyan szerkeszthetünk e szög segítségével $2°$-os szöget?

4. Vegyük fel a **d** egyenesen az $A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ pontokat (ebben a sorrendben) úgy, hogy $A_0A_1 = 1cm, A_1A_2 = 2cm ... A_{n-1}A_n = n\ cm$

a. Határozzuk meg az $A_{45}A_{99}$ szakasz hosszát.

b. Ha $A_0A_n = 861$ határozzuk meg az **n** értékét.

1. Tom és Jerry kaszinóba mentek. Tom elvesztette pénzének p%-át, Jerry viszont pénzösszegének p%-al növelte.

Így az összes pénzük $\frac{p}{8}$ %-al növekedett. Mennyi volt eredetileg a Tom és Jerrry pénzének aránya?

2. Jancsi és Pisti a következő játékot játszották: vettek egy-egy téglalap alakú füzetlapot és mindketten 12-12 részre vágták. A kapott részek közül néhányat ismét 12-12 részre vágtak és így tovább. Végül megszámlálták a papírdarabokat. Jancsi 2003, Pisti 2002 papírdarabot számolt. Ezen elcsodálkoztak, hiszen mindketten minden papírdarabot csak 12 részre osztottak.

a. Ki hibázott a papírdarabok összeszámolásánál?
b. Hány darab papírdarabot vágtak 12 részre?

3. Az *ABC* általános háromszögben legyen $D \in AC$ és $E \in AB$ úgy, hogy $AB = BD$ és $AC = CE$. Az *ABD* és *ACE* szögek szögfelezői az *I* pontban metszik egymást. Jelöljük *AM*-el az *ABC* háromszög *A*-ból húzott magasságvonalát ($M \in BC$). Bizonyítsuk be, hogy az *A*, *I* és *M* pontok egy egyenesen vannak.

4. Az *ABCD* konvex négyszögben $m(\hat{A}) = 90°$, $BC = 2AB$ és *BD* átló az *ABC* szög szögfelezője.

a). Igazoljuk, hogy $K_{DBC} = 2(K_{ADB} - AD)$

b). Ha $A\hat{D}B$ és $A\hat{B}D$ egyenesen arányosak az 5 és 7 számokkal, számítsuk ki a négyszög szögeinek mértékeit.

1. Adottak az $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4005}$ *és* $b = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{4004}{4005}$ racionális számok.

a. Mutassuk ki, hogy a < b.
b. Számítsuk ki az (a,b) intervallum középső tagját
c. Mutassuk ki, hogy ab< 2003^2.

2.
a) Igazoljuk,hogy

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \geq 0, \quad \forall x, y \in R$$

b) Keressük meg azokat az *x, y* valós értékeket amelyekre

$$x^2 + y^2 - x - y + 1 < 0.$$

c) Határozzuk meg azokat az x és y valós számokat, amelyekre a $\sqrt{x^2 + 6x + 13} + \sqrt{y^2 - 8y + 17}$ szám értéke minimális, és számítsuk ki ezt az értéket.

3. Egy egységnyi oldalú szabályos háromszögbe hét pontot helyezünk el úgy, hogy közülük bármely három ne legyen egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy létezik három pont a hét közül, úgy, hogy az általuk alkotott háromszög területe kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

4. Az *A,B,C D* négy nem egy síkban levő pont. Legyen G az ABC háromszög súlypontja és $P \in AD$, úgy hogy $\frac{3DP + 2PA}{5DP - PA} = \frac{7}{3}$.

a) Igazoljuk, hogy PG párhuzamos a *(DBC)* síkkal.
b) Ha G' *és* G'' az ACD és BCD háromszögek súlypontjai, igazoljuk, hogy $(GG'G'') \parallel (ABC)$.