XIII Vályi Gyula Emlékverseny
2006 november 24-25

V. osztály

1. Meseországban egy tanév 18 valódi nap. Miki mókus április 28-án, kedden fejezte be óvodai tanulmányait. A tanévek közötti vakáció csak 3 napos. Milyen dátumon végezte el Miki mókus az V. osztályt?

2. Számítsuk ki:
$$3^{2^{3^2}} : [(3^{509} + 3^{510}) : 4 + (4^{2^5} : 2^{62} - 1)^{509} + 3^{509}].$$

3. Anya és lánya életkora együtt 32 év. Négy év múlva az anya 3–szor idősebb lesz a lányánál.
   a) Határozzuk meg mindkettőjük életkorát.
   b) Hány év múlva lesz az anya életkora a lány életkorának kétszerese?

4. Igazoljuk, hogy az $a = 3^{2006} + 4^{2006} + 7^{2007}$ nem négyzetszám.

VI. osztály

1. Igazoljuk, hogy a $\dfrac{6n+5}{4n+3}$ tört irreducibilis, bármely $n \in N$ esetén.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet:
$$x \cdot (2^{2005} + 2^{2006}) = 3 \cdot (2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2006})$$

3.
   a. Határozzuk meg az $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 49$ szám utolsó 10 számjegyét.
   b. Igazoljuk, hogy az $m = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot ... \cdot 3^{2005}$ természetes szám nem négyzetszám.

4. Adott 21 pont a síkban.
   a. Mikor határozzák meg páronként a legtöbb egyenest? Hányat?
   b. Ha 4 pont kollineáris a 21–ből, hány különböző egyenes szerkeszthető meg az összes pont-párokon keresztül?

1. Igazoljuk, hogy az $A = 72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n$ szám osztható 15 – el , bármely $n \in N$ esetén.

2. Egy adott pénzösszeget három diák egymás között elosztott egyenesen arányosan az $\frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}$ számokkal. Az egyik diák rájött, hogy így 462 lejjel többet kap, mintha az összeget fordítottan arányosan osztották volna el a 20, 24, és 30 számokkal.
   a. Mennyi pénzt osztottak el a diákok egymás között?
   b. Mekkora összeget kapott külön-külön minden diák?

3. Az *ABC* háromszögben $m(A\measuredangle) = 90°$, a *B* szög szögfelezője *AC*–t az *E* pontban metszi. Az *E* ponton át *AB*-vel párhuzamos egyenes *BC*–t a *D* pontban metszi, a *BC*–vel *E* ponton át húzott párhuzamos *AB* – t a *H* pontban metszi. Igazoljuk, hogy:
   a. *BDEH* rombusz,
   b. Ha $\{F\} = DH \cap AC, akkor \quad FB \perp EH$.

4. Adott az *ABC* egyenlő szárú háromszög, amelyben $[AB] \equiv [AC]$ és $m(A)\sphericalangle = 20°$, továbbá $[AM] \equiv [BC]$, $M \in (AB)$ Határozzuk meg a (BMC) $\sphericalangle$szög mértékét

1.

a) Igazoljuk, hogy $4x^2-12x+y^2+14y+61\geq 0,\ (\forall)x,y\in R$.

b) Oldjuk meg a $4x^2-12x+y^2+14y+61=0$ egyenletet.

c) Határozzuk meg az

$$E(x,y)=\sqrt{4x^2-12x+13}+\sqrt{y^2+14y+58}$$

kifejezés minimális értékét.

2. Igazoljuk, hogy ha *a, b, c > 0*, akkor:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c\,.$$

3. Az *ABC* háromszögben $m(A\sphericalangle)=90^\circ$, a *B* szög szögfelezője *AC*-t E-ben metszi. Az *E* ponton át, *AB*-vel párhuzamos egyenes *BC*-t *D*-ben metszi, a *BC*-vel *E*-ponton át húzott párhuzamos *AB*-t *H*-ban metszi.

Igazoljátok, hogy:

a) *BDEH* rombusz

b) Ha $\{F\}=DH\cap AC$, akkor $FB\perp BC$

4. Pál, Kata és Péter két matematika versenyen vettek részt, s jutalomként mindkét alkalommal ugyanakkora pénzösszeget osztottak szét közöttük, először egyenesen arányosan a 6, 3, 4 számokkal, majd fordítottan arányosan a 6, 3, 4 számokkal. Péter így 20 Euróval kevesebbet kapott, mint Pál. Hány Eurót kaptak a versenyzők versenyenként külön – külön?