XVI. Vályi Gyula Emlékverseny
2009. november 27-28.

V. osztály

1. Számítsuk ki:
$22000 : [(25^{50} : 5^{99} - 3^{51} : 9^{25})^{1999} + (2^{111})^{18} + 2 \cdot 2^{1997}]$

2. Egy természetes szám 5-tel való osztási maradéka 2, valamint 6-tal való osztási maradéka 1. Határozzuk meg az adott természetes szám 30-cal való osztási maradékát.

3. Határozzuk meg azokat az $\overline{abc}$alakú háromjegyű természetes számokat, melyeknek 5-tel való osztásakor kapott hányadosuk $\overline{bc}$, a maradék pedig a.

4. Egy országúti kerékpárversenyen, hogy a sok versenyző ne akadályozza egymást az úton, úgy indították el a versenyzőket, hogy reggel 8 órakor indult el a versenyzők fele, negyedóra múlva a visszamaradt versenyzők fele, ismét negyedóra múlva a még visszamaradt versenyzők fele és így tovább. Miután az utolsó csoportot, mely csak egy versenyzőből állt, az indító elindította, egy negyed óra múlva, 10 órakor, az egyik rosszul lett versenyzővel együtt autóba szállt, és a versenyzők után indult. Hányan neveztek be a versenyre?

VI. osztály

1. Egy osztályban a diákok születésnapi ajándékra pénzt gyűjtenek. Az első diák 1 lejt, a második diák 3 lejt, a harmadik 6 lejt, a negyedik 10 lejt hozott és így tovább. Összesen 220 lejt gyűjtöttek. Hány diák van az osztályban?

2. Igazoljuk, hogy bármely n $\in \mathbb{N}^*$esetén az a szám osztható 5005-tel, ahol

a=$5^{2n} \cdot 7^{2n+1} \cdot 11^{2n} + 25^{n} \cdot 7^{2n} \cdot 11^{2n+1} - 5^{2n+1} - 5^{2n+1} \cdot 49^{n} \cdot 121^{n}$

3. Mekkora szöget zárnak be az óra mutatói 2 óra 25 perckor?

4. Hogyan lehet 7 egyforma tábla csokit igazságosan elosztani 12 gyerek között úgy, hogy egy csokit se kelljen 12 részre darabolni?

1. Egy gyalogos, kerékpáros, illetve személygépkocsi sebességét jelöljük a,b, illetve c-vel, km/h-ban kifejezve. Ezek egyenesen arányosak 2,5 és 20 számokkal. Tudva, hogy a kerékpáros sebességének 14%-a 12 km/h-val kisebb mint a gyalogos és a személygépkocsi sebességének számtani közepe, számítsuk ki mindhárom közlekedési alkalmatosság sebességét külön-külön.

2. Adottak az *x* és *y* számok:

$x=\left[(-2^{10})\cdot(-2^5)+(-3^5)^3\right]:[(2^3)^5+(-3)^5\cdot 3^{10}]+(-3)^2$ és

$y=[18:(-6)+4\cdot(-2)^3]:(-7)-(-3)^3:[(3^{n+3}\cdot 5^n):(3^n\cdot 5^{n+1})]+0{,}1^{-1}$

a) Hasonlítsuk össze az x^y és y^x számokat.

b) Határozzuk meg azt a számot, melynek 25 %-a $\frac{x^y}{y^x}\cdot\frac{1}{(5^2)^3}$, majd határozzuk meg a kapott szám természetes osztóinak számát.

3. Az *ABC* háromszög oldalaira, a háromszögön kívül, megszerkesztjük a *ABD* és *ACE* egyenlő oldalú háromszögeket, az *A* pont és a *BC* egyenes által meghatározott félsíkban pedig a *BCF* egyenlő oldalú háromszöget.

a) Igazoljuk, hogy az *ADFE* paralelogramma.

b) Mi a feltétele annak, hogy az *ADFE* négyszög rombusz legyen?

4. Egy 8. osztályos tanulótól, akinek a húga is az iskolába járt, megkérdezték, hogy hány évesek? Ő így felelt: Ha a húgom annyi idős lesz mint én vagyok most, akkor együtt 35 évesek leszünk, de ma még én háromszor annyi idős vagyok mint a húgom volt akkor, amikor én annyi idős voltam mint a húgom most. Számítsuk ki hány éves volt a két tanuló.

1. Igazoljuk, hogy
   a) ha $x \in [-2,2]$, akkor
   $$\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}=4$$
   b) ha $a=\sqrt{30-10\sqrt{5}}$ és $b=\sqrt{14+6\sqrt{5}}$, akkor $\sqrt{a \cdot b} \leq 4$.

2. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet:
   $$(x+y)(xy+1)=4xy$$

3. Adott egy *a* élű *ABCDA'B'C'D'* kocka.
   a) Határozzuk meg, hogy hány százaléka a testátló hossza az oldalátló hosszának.
   b) Számítsuk ki az *AD'* és *DB* egyenesek szögének mértékét.
   c) Határozzuk meg az *ACB'D'* tetraéder két kitérő élének távolságát.

4. Igazoljuk, hogy bárhogyan helyezünk el az egységnyi élű kocka belsejében 28 pontot, legkevesebb két pont közötti távolság szigorúan kisebb lesz mint $\frac{\sqrt{3}}{3}$.