

V. osztály

1. A Mikulás ajándécsomagokat készít. Minden csomagba legalább két almát, két csokoládét és három narancsot tesz. Legtöbb hány csomagot tud készíteni, ha 100 alma, 105 csokoládé és 145 narancs áll rendelkezésére?
2. Egy háromjegyű természetes számnak 11-el való osztási maradéka 7.
 - a.) Határozzuk meg a legkisebb háromjegyű számot, amely teljesíti a feladat feltételét.
 - b.) Határozzuk meg a legnagyobb ilyen természetes számot.
 - c.) Határozzuk meg az ilyen háromjegyű számok számát.
 - d.) Számítsuk ki az ilyen háromjegyű számok összegét.

3. Adottak a következő természetes számok:

$$a = \left\{ 4^{16} \cdot 8^{11} \cdot 2^5 + (3^{503})^4 + 2012^0 \right\} : \left\{ \left[(9^{50})^3 \cdot 3^{200} \cdot 27 \right]^4 + (4^5)^7 + 1^{2012} \right\}$$

$$b = \left[(2 + 4 + 6 + \dots + 4000) : 2001 \right] : 400 - 1$$

$c = u(2^{2012} + 3^{2012} + 4^{2012} + 9^{2012})$, ahol $u(x)$ az x szám utolsó számjegyét jelöli.

- a.) Határozzuk meg az a, b, c számok értékét.
 - b.) Igazoljuk, hogy az \overline{abc} háromjegyű szám teljes négyzet.
4. Egy osztályteremben, ha a tanulók kettesével ülnek a padokba, akkor 6 tanulónak nem jut hely. Ha azonban hármassával ülnek, akkor két üres pad marad. Hány tanuló és hány pad van az osztályteremben?

1. Tekintsük a természetes számok következő sorozatát:
5, 7, 11, 19, 35, 67, ...
 - a) Határozzuk meg a sorozat növekedésének szabályát.
 - b) Határozzuk meg a sorozat következő két tagját.
 - c) Ha a sorozat 2012-ik tagja n , akkor igazoljuk, hogy $n - 3$ négyzetszám.
2. Hét természetes szám összege 2013. Ezek közül háromnak az összege 2000. Igazoljuk, hogy a hét szám szorzata osztható 4-gyel.
3. Hány olyan négyzet található a 4×5 -ös négyzetrácsban, amelyek csúcspontjai rácspontok?
4. Adottak az A , B , C és D kollineáris pontok ebben a sorrendben. Legyen $AB = 12\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$ és $CD = 16\text{cm}$. Jelöljük M -el az AB , N -el a BC és P -vel a BD szakasz felezőpontjait. Ha az AD szakaszon kívül felvesszük az E pontot úgy, hogy $BE = 2 \cdot MD$, mekkora az AE szakasz hossza? Hány megoldása van a feladatnak?

VII. osztály

1. Pistike a születésnapjára ajándékként kapott 300 lejét, évi 7,5%-os kamattal letétbe helyezte a bankba. Két év múlva kivette a kamat felét, majd újabb év múlva kivet 100 lejt. Számítsuk ki, két tizedesnyi pontossággal, hogy a következő év végén mennyi pénze lesz a bankban.
2. Legyen $E(n) = (-1)^n \cdot (k + 1) - \frac{n^2 \cdot (k+1) \cdot (-1)^n}{n+1} - \frac{n \cdot (k+1) \cdot (-1)^n}{n+1}$
ahol $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a. Igazoljuk, hogy $E(n) = (-1)^n \cdot (k + 1) \cdot (1 - n)$,
 - b. Határozzuk meg a $k \in \mathbb{N}^*$ értékét úgy, hogy
 - c. $S = E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(101)$, négyzetszám legyen.
3. Az ABC háromszögben AD magasságvonal. Jelöljük M , N és P -vel az AB , BC , illetve AC oldalak felezőpontjait. Igazoljuk, hogy $MDNP$ vagy $MNDP$ négyszög egyenlő szárú trapéz.
4. Az $ABCD$ paralelogramma, a BD átlóval az A ponton keresztül húzott párhuzamos egyenes a DC és BC oldalak meghosszabbításait az M , illetve N pontokban metszi. Az AC átlóval az M ponton keresztül húzott párhuzamos egyenes az AD oldal meghosszabbítását P pontban, az N ponton keresztül húzott párhuzamos egyenes az AB oldal meghosszabbítását Q pontban metszi.
Igazoljuk, hogy:
 - a. $MNQP$ négyszög paralelogramma
 - b. a PB és AC szakaszok metszéspontja a BCD háromszög súlypontja.

1. Határozzuk meg az $\frac{1}{17 \cdot 21} + \frac{1}{21 \cdot 25} + \frac{1}{25 \cdot 29} + \dots + \frac{1}{2009 \cdot 2013}$ összeg huszonnegyedik tagját, majd számítsuk ki az összeget.
2. Hány közös megoldása van a $\{(-2,5)^3\} - [(-2,5)^{-1}] - x^2 = -2,625$ és az $\left[\frac{5x-4}{4} \right] = \frac{x+3}{5}$ egyenleteknek, ha $[a]$ az a valós szám egészrészét, $\{a\}$ az a törtrészét jelöli.
3. Az $ABCD$ négyzetben felvesszük az E és F pontokat úgy, hogy $DE \perp EF$, $EF \perp FB$, $DE = 3\text{cm}$, $EF = 4\text{ cm}$, $FB = 5\text{ cm}$. Számítsuk ki a négyzet oldalának hosszát.
4. Egy 6 cm élű tömör kockának harmadoljuk az éleit, majd levágjuk a kocka nyolc sarkát a harmadolással keletkezett egyenlő oldalú háromszögek mentén.
 - a. Számítsuk ki az így kapott csonka test felszínét.
 - b. Mennyi a távolság két átlósan szemben fekvő háromszög között?