

Egyenletek

◆ Órán megoldott feladatok:

- 1) Határozzuk meg az n természetes számot úgy, hogy:

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}} = \frac{\sqrt{2}+4}{2}.$$

- 2) Az egész számok halmazán oldjuk meg a $\sqrt{x^2+y^2-4x+6y+17} + \sqrt{z^2-2z+2} = 3$ egyenletet.

- 3) Oldjuk meg a valós számok halmazán az: $\frac{x^3+1}{9} + \frac{x^3+2}{10} + \frac{x^3+3}{11} + \dots + \frac{x^3+1012}{1020} = 1012$ egyenletet.

- 4) Oldjuk meg a valós számok halmazán az:

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-2012| = 2013x - 2013^2 \text{ egyenletet.}$$

- 5) Határozzuk meg az x és y egész számokat, amelyekre $x^2 - 5^y = 8$.

- 6) Az egész számok halmazán oldjuk meg az $\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{2}$ egyenletet.

- 7) Határozzuk meg az x és y valós számokat, amelyekre $\sqrt{x-4} + \sqrt{y-4} = \frac{x+y}{4}$.

◆ Javasolt házi feladat:

- 1) Határozzuk meg az n természetes számot úgy, hogy:

$$\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}+\sqrt{8}} + \dots + \frac{\sqrt{n+5}}{1+\sqrt{n+5}+\sqrt{n+6}} = \frac{\sqrt{6}+24}{2}.$$

- 2) Határozzuk meg az x , y és z valós számokat, amelyekre: $x^2 + y^2 + z^2 + 39 = 2(2x + 3y + 4z + 5)$.

- 3) Oldjuk meg a valós számok halmazán az:

$$|x-1| + |2-x| + |x-3| + |4-x| + \dots + |2012-x| + |x-2013| = 2014(x-2014) \text{ egyenletet.}$$

- 4) Határozzuk meg az x és y valós számokat, amelyekre $\sqrt{x-1936} + \sqrt{y-1936} = \frac{x+y}{88}$.

- 5) Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $xyz - xy - xz - yz + x + y + z = 2014$ egyenletet.

- 6) Oldjuk meg a természetes számok halmazán az:

$$\frac{x^2+2}{2x+1} + \frac{x^2+3}{2x+2} + \frac{x^2+4}{2x+3} + \dots + \frac{x^2+2011}{2x+2010} + \frac{x^2+2012}{2x+2011} + \frac{x^2+2013}{2x+2012} = 2012 \text{ egyenletet.}$$

- 7) Oldjuk meg a valós számok halmazán :

$$\frac{1+2+\dots+2013}{2013-2012+2011-2010+\dots+5-4+3-2+1} = \frac{11x-1}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013}}.$$

◆ Kiegészítő feladatok:

- 1) Az egész számok halmazán oldjuk meg az $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x - \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| = \frac{4}{5}$ egyenletet.

- 2) Határozzuk meg az \overline{xy} természetes számot, amelyre $\frac{1}{\sqrt{xy-1}} = \overline{0,xy}$.

- 3) Határozzuk meg az x , y és z valós számokat, amelyekre:
$$\begin{cases} 25x^2 + 20y^2 + 13z^2 \leq 1952 \\ 3xy + 6yz + 4zx = 488 \\ x + y + z = 18 \end{cases}.$$

4) Oldjuk meg: a) $\left| \frac{10x}{5x+1} \right| + \left| \frac{5x+1}{10x} \right| + |5x-1| = 2, x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{5}, 0 \right\};$

b) $x^3 - 4x + 4 = \frac{x^4}{4}, x \in \mathbf{R}$ egyenletet.

5) Létezik-e olyan egész szám, amelyekre $\frac{x^2 - x + 7}{9} + \frac{x^2 - 2x + 7}{10} + \frac{x^2 - 3x + 7}{11} + \dots + \frac{x^2 - 2013x + 7}{2021} = 2013?$

6) Igazoljuk, hogy az $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1006}} + \frac{1}{\sqrt{2012-x} + \sqrt{1006}} = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{2012-x}}$ egyenletnek 2013 megoldása van az egész számok halmazán.

7) Határozzuk meg az (x, y, z) valós számhármast, amelyre $\sqrt{x-2010} + \sqrt{y+2012} + \sqrt{z-4} = \frac{x+y+z+1}{2}$.

8) Határozzuk meg az x, y és z valós számokat, amelyekre:
$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

9) Oldjuk meg az $(x+y)^2 - 2(x-2)(y+1) + 1 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán.

10) Határozzuk meg az (x, y, z) egész számhármast, amelyre $x^2 + y^2 + z^2 = 16(x+y+z)$.

11) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

12) Az egész számok halmazán oldjuk meg az $x^4 - y^4 = 16$ egyenletet.

13) Az egész számok halmazán oldjuk meg az $(x^2 + 6x + 52)(y^2 - 10y + 84) = 2537$ egyenletet.

14) Igazoljuk, hogy az $(x+1)(x+2) = y(y+2)$ egyenletnek **nincs** megoldása az $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ halmazon.

15) Igazoljuk, hogy az $(x+1)(x+2) = (y+2)(y+3)$ egyenletnek végtelen sok megoldása van az $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ halmazon.

16) Határozzuk meg az x valós számokat, amelyekre: $\frac{2}{\{x\}} = \frac{4}{[x]} + \frac{5}{x}$, ahol $\{x\}$ és $[x]$ az x valós szám törtrészét illetve egészrészét jelöli.