Mértani középarányos

Középarányosok egyenlőtlenségével megoldható feladatok

1) Ha $a, b, c \geq 0$, akkor bizonyítsd be, hogy $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

2) Ha $a, b, c \geq 0$, akkor bizonyítsd be, hogy $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

3) Ha $a, b, c \geq 0$, akkor bizonyítsd be, hogy $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$.

4) Ha $a, b, c \geq 0$, akkor bizonyítsd be, hogy $(ab+1)(bc+1)(ac+1) \geq 8abc$.

5) Bizonyítsd be, hogy $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$, ahol $x, y > 0$.

6) Bizonyítsd be, hogy $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq 3$, ahol $x, y, z > 0$.

7) Bizonyítsd be, hogy $(a+b)\sqrt{c}+(b+c)\sqrt{a}+(c+a)\sqrt{b} \geq 6\sqrt{abc}$, ahol $a, b, c > 0$.

8) Bizonyítsd be, hogy $(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(c^2+a^2)b \geq 6abc$, ahol $a, b, c > 0$.

9) Bizonyítsd be, hogy $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 8a^2b^2c^2$, ahol $a, b, c > 0$.

10) Bizonyítsd be, hogy $\left(a+\frac{b}{ac}\right)\left(b+\frac{c}{ab}\right)\left(c+\frac{a}{bc}\right) \geq 8$, ahol $a, b, c > 0$.

11) Bizonyítsd be, hogy $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$, ahol $a, b, c > 0$.

12) Bizonyítsd be, hogy $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c$, ahol $a, b, c > 0$.

13) Bizonyítsd be, hogy $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$, ahol $a, b, c > 0$.

14) Bizonyítsd be, hogy $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{c^4}+\frac{c^4}{a^4} \geq \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$, ahol $a, b, c > 0$.

15) Bizonyítsd be, hogy $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4$.

16) Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{(x-a)(b-y)}+\sqrt{(y-a)(b-x)} \leq b-a$, ahol $a, b \in \mathcal{R}$, $a < b$ és $x, y \in [a, b]$.

17) Bizonyítsd be, hogy $a+b+c+d \geq 4\sqrt{abcd}$, ahol $a, b, c, d > 0$.

18) Bizonyítsd be, hogy $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$, ahol $a, b, c > 0$.

19) Bizonyítsd be, hogy $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$, ahol $a, b, c > 0$.

20) Bizonyítsd be, hogy $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n$, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ és $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$.

21) Bizonyítsd be, hogy $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geq n$, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

22) Bizonyítsd be, hogy $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

Engel Olga