Egyenletek, maximum és minimum feladatok

♦Órán megoldott feladatok:

1.Oldjuk meg az alábbi egyenletet a természetes számok halmazában: $x+y+z=xyz$..

2.Oldjuk meg az alábbi egyenletet az $\mathbf{N}^*$ halmazon: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$.

3.Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az $\mathbf{Z}$ halmazon:

a) $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=1$; b) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{4}$; c) $3xy+9x-2y=13$;d) $9x^2+2y^2-6xy-8y+3=0$.

4. Legyen $E(x)=x^2-12x+48$. Határozzuk meg az $A=\{(x,y) \mid y=\min E(x)\}$ halmazt.

5. Határozzuk meg az $E(x,y,z)=\sqrt{4x^2+4x+5}+\sqrt{9y^2-12y+13}+\sqrt{16z^2+24z+25}$ $x,y,z\in\mathbf{R}$ alábbi kifejezés legkisebb értékét és x, y,z azon értékét, amelyre a kifejezés a legkisebb.

♦Javasolt házi feladat:

1.Oldjuk meg az alábbi egyenletet a természetes számok halmazában: $x+y=xy$.

2.Oldjuk meg az alábbi egyenletet az $\mathbf{N}^*$ halmazon: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x+y+z}=2$.

3.Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az $\mathbf{Z}$ halmazon:

a) $\frac{1}{4x}+\frac{1}{5y}=\frac{1}{20}$; b) $xy-3x+2y=1$;

4.Oldjuk meg a $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ halmazon alábbi egyenletet: $xy+y-3x=2015$;

5. Legyen $E(x)=x^2-15x+72$. Határozzuk meg az $A=\{(x,y) \mid y=\min E(x)\}$ halmazt.

6. Határozzuk meg az $E(x,y,z)=9x^2+y^2+z^2-6x-8y-4z+20$, $x,y,z\in\mathbf{R}$ alábbi kifejezés legkisebb értékét és x, y,z azon értékét, amelyre a kifejezés a legkisebb.

♦Kiegészítő feladatok:

1.Oldjuk meg az alábbi egyenletet a természetes számok halmazában: $x+y+z+t=xyzt$.

2.Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az $\mathbf{N}$ halmazon:

a) $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{37}{16}$; b) $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{n}}}=\frac{43}{30}$.

3.Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az $\mathbf{Z}$ halmazon:

a) $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{37}{16}$; b) $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{n}}}=\frac{43}{30}$.

4.Oldjuk meg a $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ halmazon alábbi egyenleteket: a) $\frac{3}{x^2-8x+16}+\frac{5}{y^2-12y+36}=\frac{1}{2}$;

b) $x^2-xy-y=2016$; c) $2x^2-(2y-1)x+y=2003$.

5.Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az $\mathbf{N}$ halmazon:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2000}$; b) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{18}}$.

6. Határozzuk meg az alábbi kifejezések legkisebb értékét illetve az x azon értékét, amelyre a kifejezés a legkisebb: a) $E(x)=25x^2+40x+28$, $x\in\mathbf{R}$; b) $E(x)=9x^4-24x^2+25$, $x\in\mathbf{R}$;
c) $E(x)=16x^2-8x+17$, $x\in\mathbf{R}$.

7. Határozzuk meg az alábbi kifejezések legnagyobb értékét illetve az x azon értékét, amelyre a kifejezés a legnagyobb: a) $E(x)=-16x^2+40x-23$, $x\in\mathbf{R}$; b) $E(x)=-12x^2-12x-17$, $x\in\mathbf{R}$;
c) $E(x)=-x^2-8x+9$, $x\in\mathbf{R}$.; d) $E(x)=-2\sqrt{x^4+8x^3+42x^2+104x+169}$, $x\in\mathbf{R}$.

8. Határozzuk meg az $E(x)=\frac{9x^2+12x+20}{3x+2}$, $x\in\mathbf{R}$ alábbi kifejezés legkisebb értékét és x azon értékét, amelyre a kifejezés a legkisebb.

9. Legyen $x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$ úgy, hogy $x+y+z=1$.
Határozzuk meg az $E(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ kifejezés legkisebb értékét.

10. Legyen $x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$ úgy, hogy $x+y+z=1$.
Határozzuk meg az $E(x,y,z)=x^6+y^6+z^6+\frac{x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4}{x^4y^4z^4}$ kifejezés legkisebb értékét.

11.Határozzuk meg az $x,y,z\in\mathbf{R}$ értékét úgy, hogy $E(x,y,z)=2x^2-4xy+5y^2-12yz+13z^2-4z+9$ kifejezés a legkisebb legyen.

12. Ha $x+y=k$,(k állandó) , akkor mutassuk ki, hogy $x\cdot y$ a legnagyobb, ha $x=y=\frac{k}{2}$.
(Az összes azonos kerületű téglalapok közül a négyzet területe a maximális.)

13. Ha $x\cdot y=k$,(k állandó) , akkor mutassuk ki, hogy $x+y$ a legkisebb, ha $x=y=\sqrt{k}$.
(Az összes azonos területű téglalapok közül a négyzet kerülete a legkisebb.)

15. Legyen $x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$ úgy, hogy $x+3y+5z=2$. Mutassuk ki, hogy $\sqrt{2x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{10z+1}<5$.

16. Legyen $x,y\in\mathbf{R}_+^*$ úgy, hogy $x+y=1$. Mutassuk ki, hogy $x^6+y^6+\frac{x^4+y^4}{x^4\cdot y^4}\geq 2$.

17. Legyen $x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$ úgy, hogy $x\neq y\neq z\neq x$.
Mutassuk ki, hogy $\frac{x}{4x+y+z}+\frac{y}{x+4y+z}+\frac{z}{x+y+4z}<\frac{1}{2}$.

18. Legyen $x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$. Mutassuk ki, hogy $\frac{x}{5x+y+z}+\frac{y}{x+5y+z}+\frac{z}{x+y+5z}\leq\frac{3}{7}$.

19. Legyen $x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$ úgy, hogy $xyz=1$.
Mutassuk ki, hogy $\frac{1}{xy(z^2+1)}+\frac{1}{yz(x^2+1)}+\frac{1}{xz(y^2+1)}\leq\frac{3}{2}$.