

A racionális számok halmaza

1) a) Mutasd ki, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$

b) Számítsd ki a következő összeget:

$$S = \frac{1}{1000 \cdot 1001} + \frac{1}{1001 \cdot 1002} + \dots + \frac{1}{1999 \cdot 2000}$$

2) Végezd el: $\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{29 \cdot 30}$

3) Számítsd ki: $(1+2+3+\dots+100) \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right)$

4)

5) Végezd el: a) $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{1999}\right)$

b) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2000^2}\right)$

6) Határozd meg x egész értékeit, melyekre:

a) $\frac{4}{x-2} \in \mathbb{Z}$; b) $-\frac{5}{x+3} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{6}{2x-3} \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{x-2}{x+2} \in \mathbb{N}$; e) $\frac{17}{x^2+1} \in \mathbb{N}$; f) $\frac{x^8+x^4}{x^6} \in \mathbb{Z}$

g) $\frac{2x+13}{7x-12} \in \mathbb{Z}$; h) $\frac{x^2+2x+4}{x+2} \in \mathbb{Z}$

7) Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$a = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}; \quad b = \frac{n+2n \cdot (-1)^n}{(-3)^n}; \quad c = \frac{1-(-1)^n}{(-1)^n}; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

8) Legyen $M = \left\{ +5; 0; -7\frac{1}{2}; 4; -4,15; 24\frac{5}{6}; -3,5; \frac{9}{5} \right\}$

Határozd meg A és B halmazokat úgy, hogy egyidejűleg igazak legyenek a következő állítások: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = M$ és

$\text{card } A = \text{card } B$ és bármely $x \in A$ és $y \in B$: $x < y$.

($\text{card } A$ = az A halmaz elemeinek száma)

9) Határozd meg a következő halmazok kardinalis számát (számszáigát): $A = \{x \in \mathbb{Z} / x < 100; |x| = x\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / 100 < |x| < 200\}$

10) Oldd meg \mathbb{Q} halmazon:

a) $|x-2,3| \cdot (0,25 + |x-10|) = 0$

b) $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

11) Határozd meg $n \in \mathbb{N}$ számot, ha: a) $\frac{1}{10} < \frac{5}{4n+3} < \frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{9} < \frac{3}{n^2} < \frac{10}{9}$

12) Legyen $A = \{3; -5; 4\}$ és $B = \{-3; 0; 2\}$. Határozd meg a következő halmazokat: $M = \{|x| + |y| \mid x \in A, y \in B\}$ és $P = \left\{ \left| \frac{x}{y} \right| \mid x \in B, y \in A \right\}$

13) Végezd el: $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{2014})$

14) Végezd el: a) $(-1)^n \cdot \frac{1}{3} - (-\frac{1}{2}) \cdot (-1)^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $(-1)^m (-\frac{5}{6}) + (-1)^n \cdot \frac{1}{2}$, $m, n \in \mathbb{N}$

c) $\frac{1}{2} \cdot (-1)^m + \frac{1}{3} \cdot (-1)^{m+n} - \frac{1}{2} \cdot (-1)^{m+n+p}$, $m, n, p \in \mathbb{N}$

15) Bármilyen két racionális számra értelmezzük a következő műveleteket: $x \circ y = \frac{4x-2y}{x+y}$; $x * y = 2x - 3y + 5$

a) Számítsd ki $\frac{2}{5} \circ (-\frac{3}{4})$ és $\frac{4}{5} * (-\frac{5}{6})$

b) Oldd meg: $x \circ \frac{4}{5} = 2$; $x * \frac{2}{3} = 0$; $(-3) * y = 1$

16) Végezd el: a) $\frac{(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{100} + (-1)^{101}}{(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot \dots \cdot (-1)^{100}}$; b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{1260}$

17) Oldd meg \mathbb{Q} -ban:

a) $\left(\frac{1}{88} + \frac{1}{888} + \dots + \frac{1}{\underbrace{800\dots08}_{n \text{ zérus}}} \right) \cdot x = \frac{1}{44} + \frac{1}{444} + \dots + \frac{1}{\underbrace{4000\dots04}_{n \text{ zérus}}}$

b) $(-1)^{n+1}(x+2) + (-1)^{p-2}(2x+1) = (-1)^{n+p+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$

c) $\frac{x-3}{2011} + \frac{x-5}{2009} + \frac{x-7}{2007} = \frac{x-2011}{3} + \frac{x-2009}{5} + \frac{x-2007}{7}$

d) $\frac{x-3}{19} + \frac{x-5}{17} + \frac{x-7}{15} + \frac{x-9}{13} = \frac{x-19}{3} + \frac{x-17}{5} + \frac{x-15}{7} + \frac{x-13}{9}$

e) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} + \dots + \frac{x+1999}{2000} = 1999$

18) Oldd meg \mathbb{Z} -ben: $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 1$

19) Oldd meg \mathbb{N}^* -ben: $\frac{x}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

20) Oldd meg \mathbb{Z} -ben: a) $\frac{1}{4x} + \frac{1}{5y} = \frac{1}{20}$; b) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{4}$

c) $3xy + 9x - 2y = 13$