Vályi Gyula matematikakör, 2015 január 16. VII. osztály
Varga Nagy Anna

# RACIONÁLIS SZÁMOK HALMAZA

1.
   a. Mutasd ki, hogy $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$, bárnely $n \in \mathbb{N}^*$
   b. Számítsd ki a következő összeget:
$$S=\frac{1}{1000\cdot 1001}+\frac{1}{1001\cdot 1002}+\cdots+\frac{1}{1999\cdot 2000}$$
2. Végezd el:
$$\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{29\cdot 30}$$
3. Számítsd ki: $(1+2+3+\cdots+100)\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}\right)$
4.
5. Végezd el
   a. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{1999}\right)$
   b. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2000^2}\right)$
6. Határozd meg x egész értékeit, melyre:
   a. $\frac{4}{x-2}\in\mathbb{Z}$;
   b. $\frac{-5}{x+3}\in\mathbb{Z}$;
   c. $\frac{6}{2x+3}\in\mathbb{Z}$;
   d. $\frac{x-2}{x+2}\in\mathbb{N}$;
   e. $\frac{17}{x^2+1}\in\mathbb{N}$;
   f. $\frac{x^8+x^4}{x^6}\in\mathbb{Z}$;
   g. $\frac{2x+13}{7x-12}\in\mathbb{Z}$;
   h. $\frac{x^2+2x+4}{x+2}\in\mathbb{Z}$;
7. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat:
   $a=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$ $b=\frac{n+2n\cdot(-1)^n}{(-3)^n}$ $c=\frac{1-(-1)^n}{(-1)^n}$ ha $n\in\mathbb{N}^*$;
8. Legyen $M=\left\{+5; 0;\ -7\frac{1}{2}; 4;\ -4{,}15; 24\frac{5}{6};\ -3,(5);\ \frac{9}{5}\right\}$.
9. Határozd meg A és B halmazokat úgy hogy egyidejűleg igazak legyenek a következő állítások: $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B=M$ és card A = cardB és bármely $x\in A$ és $y\in B$, $x<y$ (card A = az A halmaz elemeinek száma).
10. Határozd meg a következő halmazok kardinális számát(számosságát)
    $A=\{x\in\mathbb{Z}|x<100; |x|=x\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z}|100<|x|<200\}$,
11. Oldd meg a $\mathbb{Q}$ halmazon:
    a. $|x-2,(3)|\cdot(0{,}25+|x-10|)=0$
    b. $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0$
12. Határozd meg $n\in\mathbb{N}$ számot, ha
    a. $\frac{1}{10}<\frac{5}{7n+3}<\frac{1}{6}$
    b. $\frac{1}{9}<\frac{3}{n^2}<\frac{10}{9}$
13. Legyen $A=\{3;\ -5;4\}$ és $B=\{-3;0;2\}$. Határozd meg a következő halmazokat:
    $M=\{|x|+|y|\,|x\in A, y\in B\}$, és $P=\left\{\left|\frac{x}{y}\right|\,|x\in B, y\in A\right\}$
14. Végezd el: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{2014}\right)$
15. Végezd el:

a. $(-1)^n \cdot \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)^{n+3}, n \in \mathbb{N};$

b. $(-1)^m \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + (-1)^n \cdot \frac{1}{2},\ \ m; n \in \mathbb{N};$

c. $\frac{1}{2}(-1)^m + \frac{1}{3}(-1)^{m+n} - \frac{1}{2}(-1)^{m+n+p},\ \ m; n; p \in \mathbb{N};$

16. Bármely két racionális számra értelmezzük a következő műveleteket:

$$x \circ y = \frac{4x-2y}{x+y} \qquad x * y = 2x - 3y + 5$$

a. Számítsd ki $\frac{2}{5} \circ \left(-\frac{3}{4}\right)$ és $\frac{4}{5} * \left(-\frac{5}{6}\right)$

b. Oldd meg : $x \circ \frac{4}{5} = 2;\quad x * \frac{2}{3} = 0$ és

c. $(-3) * y = 1$

17. Végezd el:

a. $\frac{(-1)^1+(-1)^2+\cdots+(-1)^{100}+(-1)^{101}}{(-1)^1\cdot(-1)^2\cdot\ldots\cdot(-1)^{100}}$

b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{1260}$

18. Oldd meg $\mathbb{Q}$-ban:

a. $\left(\frac{1}{88} + \frac{1}{888} + \cdots + \frac{1}{8\underbrace{00\cdots0}8}\right) \cdot x = \frac{1}{44} + \frac{1}{444} + \cdots + \frac{1}{4\underbrace{00\cdots0}4}$

b. $(-1)^{n+1}(x+2) + (-1)^{p-2}(2x+1) = (-1)^{m+p+1}, n \in \mathbb{N}; p \in \mathbb{N}$ és $p \geq 2$

c. $\frac{x-3}{2011} + \frac{x-5}{2009} + \frac{x-7}{2007} = \frac{x-2011}{3} + \frac{x-2009}{5} + \frac{x-2007}{7}$

d. $\frac{x-3}{19} + \frac{x-5}{17} + \frac{x-7}{15} + \frac{x-9}{13} = \frac{x-19}{3} + \frac{x-17}{5} + \frac{x-15}{7} + \frac{x-13}{9}$

e. $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} + \cdots + \frac{x+1999}{2000} = 1999$

19. Oldd meg a $\mathbb{Z}$-ben: $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 1$

20. Oldd meg az $\mathbb{N}^*$-ben $\frac{x}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

21. Oldd meg a $\mathbb{Z}$-ben:

a. $\frac{1}{4x} + \frac{1}{5y} = \frac{1}{20}$

b. $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{4}$

c. $3xy + 9x - 2y = 13$