A valós számok halmaza. Műveletek a valós számok halmazán

♦Órán megoldott feladatok:

1) Igazoljuk, hogy a $\sqrt{3^n+7^{n+1}}$ irracionális szám, bármely $n\in\mathbf{N}$ esetén.

2) Igazoljuk, hogy $\sqrt{n^{2012}+2012}$ irracionális szám, bármely n természetes szám esetén.

3) Igazoljuk, hogy $\sqrt{4n+3}\notin\mathbf{Q}$, bármely n természetes szám esetén.

4) Mutassuk ki, hogy $\sqrt{10^{20}+3\cdot10^{10}-1}\notin\mathbf{Q}$.

5) Legyen $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ és $x=\sqrt{a(1+2+3\ldots+n)}$, ahol $n\in\mathbf{N}^*$

a) Igazoljuk, hogy $[a]=0$, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli.

b) Mutassuk ki, hogy $x\notin\mathbf{Q}$.

6). Adottak az $a=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}}+\ldots+\frac{\sqrt{2013}-\sqrt{2011}}{\sqrt{4048143}}+\frac{1}{\sqrt{2013}}$ és

$b=\left(\left|3^{51}-2^{85}\right|+3^{2012}:81^{490}:3\right):\left(-4^{41}\right)+\sqrt{1296}+\sqrt{\left(8-5\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{75}+\sqrt{2^8}$ számok.

a) Számítsuk ki a fenti számok mértani közepét.

b) A $3a$ illetve $\sqrt{b}$ számok közül melyik található az $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,\frac{3x+1}{4x-5}\in\mathbf{Z}\right\}$ halmazban.

♦Javasolt házi feladat:

1) Igazoljuk, hogy a $\sqrt{19^{n+1}+74^{n+1}}$ irracionális szám, bármely $n\in\mathbf{N}$ esetén.

2) Igazoljuk, hogy a $\sqrt{6^n+5n^2+7}$ irracionális szám, bármely $n\in\mathbf{N}$ esetén.

3) a) Igazoljuk, hogy $\sqrt{4n+2}\notin\mathbf{Q}$, bármely n természetes szám esetén.

b) Ha a és b páratlan természetes számok, igazoljuk, hogy $\sqrt{a^2+b^2+4}\notin\mathbf{Q}$.

4) Igazoljuk, hogy $\sqrt{2525252525 25}\notin\mathbf{Q}$.

5) Adott az $S=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{9900}}$ szám.

a) Mutassuk ki, hogy S egy racionális szám.

b) Számitsuk ki $\left(1-|S|\right)^{-10}$ kifejezés értékét.

6)Tekintsük az $S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

Határozzuk meg az $n\in\mathbf{N}$ számot úgy, hogy $S=2014$.

7) Igazoljuk, hogy $a = b$, ahol:

$$a=\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\right]\cdot\frac{\left(4-2\sqrt{3}\right)^2}{8},\quad b=\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2008}+\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^{2008}}\right]\cdot\frac{\left(4-2\sqrt{3}\right)^{2008}}{2^{2009}}.$$

♦**Kiegészítő feladatok:**

1). Tekintsük az $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$ páratlan természetes számokat.

Igazoljuk, hogy $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2012}^2 - 1}$ irracionális szám.

2) Ha $(\overline{ab2}; \overline{bc7}; \overline{ca8}) = 3$, mutassuk ki, hogy $A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ irracionális szám.

3) Igazoljuk, hogy $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot 2010 + 2010}$ irracionális szám.

4) Igazoljuk, hogy az $a = \left[\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{2012} + \dfrac{7}{\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{2012}}\right] \cdot \dfrac{\left(10 - 4\sqrt{6}\right)^{2011}}{2^{2012}} - 4\left(\sqrt{24} + 2\dfrac{3}{4}\right)$ szám egy teljes négyzet.

5) Legyen $x = \sqrt{\sqrt{2008} + \sqrt{2007}} \cdot \left(\sqrt{\sqrt{2008} + 1} - \sqrt{\sqrt{2008} - 1}\right)$.

a) Igazoljuk, hogy: $x>0$;
b) Számítsuk ki x^2 értékét;
c) Számítsuk ki $[x]$ és $\{x\}$ értékét.

6) Számítsuk ki az $S = \dfrac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{(n+1)}}$, $n \in \mathbf{N}^{\bullet}$ összeget.

7). Számítsuk ki az $S = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} + \ldots + \sqrt{2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)}}$, $n \in \mathbf{N}^{\bullet}$ összeget.

8) Határozzuk meg az összes olyan $(a;b;c)$ számhármast, amelyre $\sqrt{\overline{x,y(z)} + \overline{y,z(x)} + \overline{z,x(y)}} \in \mathbf{Q}$.

9) Határozzuk meg az $A = \left\{\overline{ab} \,\middle|\, \sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} \in \mathbf{Q}\right\}$ halmaz elemeit.

10)Határozzuk meg x és y számjegyeket úgy, hogy $a = \sqrt{2\left(\overline{x,1(y)} + \overline{x,2(y)} + \ldots + \overline{x,9(y)}\right)} \in \mathbf{N}$

11)Határozzuk meg az $\overline{ab}$ számokat, $a < b$ úgy, hogy $\sqrt{14(a+b) - \overline{ba} - \overline{ab}} \in \mathbf{N}$

12)Határozzuk meg az $\overline{ab}$ számot, úgy, hogy $\sqrt{\overline{ab} + \sqrt{\overline{ab} + 7}} \in \mathbf{N}$

13) Határozzuk meg az $x \in \mathbf{Z}$ úgy, hogy $\sqrt{\dfrac{5x - 2}{x + 3}} \in \mathbf{Z}$.

14) Határozzuk meg az $x \in \mathbf{Z}, x \neq -1$ úgy, hogy $\sqrt{\dfrac{x - 2010}{x + 1}} \in \mathbf{Z}$.

15) Számítsuk ki az $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \,\middle|\, \sqrt{\dfrac{20x - 26}{x - 2}} \in \mathbf{Z}\right\}$ halmaz elemeit.

16) Határozzuk meg az $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \,\middle|\, \sqrt{\dfrac{4x + 7}{3x - 2}} \in \mathbf{Z}\right\}$ halmazt.

17) Adottak az $a = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \ldots + \sqrt{2^{99}}$ és $b = 2^{50} - \sqrt{2}$ számok.

Számítsuk ki a $\dfrac{b}{a}$ szám egészrészét.