VÁLYI GYULA MATEMATIKA KÖR **VI**. OSZTÁLY 2014 november 28

OSZTHATÓSÁG 1. OSZTHATÓSÁGI KRITÉRIUMOK 2, 5, 10, 2^n,3, 9, 7, 11, 13-mal. PRÍMSZÁMOK. ÖSSZETETT SZÁMOK. A MARADÉKOS OSZTÁS TÉTELE

KITŰZÖTT FELADATOK:

1. Számítsuk ki $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1995 - 1$ számnak a $B = 100 \cdot 101$-el való osztási maradékát!
2. Határozzuk meg az $a = 3 \cdot 4^{20} \cdot 7^2 \cdot 25^{20}$ természetes szám valódi osztóinak számát!
3. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$ mutassu ki, hogy $N = 3^{n+2} + 3^{n+3} + 3^{n+4}$ osztható 1053-al.
4. Határozzuk meg azokat az $n \in \mathbb{N}$ természetes számokat, amelyekre
   a) $A = 3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$ prímszám
   b) Határozzuk meg azokat a *p*- prímszámokat, amelyekre a $p^2 + 13$ is prímszám
   c) Mutassuk ki, hogy $\overline{\underbrace{999\ldots9}_{99\ -\text{szer}}a}$ nem prímszám, $a \in \mathbb{N} - \{1\}$
   d) Mutassuk ki, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^{2n} \cdot 5^{2n+1} + 1$ nem prímszám
   e) Határozzuk meg azokat az *a,b,c* prímszámokat amelyekre igaz az alábbi egyenlőség: 3a+4b+2c=48
5. Határozzuk meg 70^{2014}-számnak a 69-el való osztási maradékát!
6.
   a) Mutassuk ki, hogy $n^{51} - n^{15}$ osztható 10-el $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén
   b) Mutassuk ki, hogy $n = 1 + 2^2 + 2^4 + \ \ldots + 2^{98}$ osztható 5-el.
   c) Mutassuk ki, hogy $(10^n + 125) \vdots 9$
   d) Ha $n \not\vdots 3$ és $(4n+1) \not\vdots 3$ mutassuk ki, hogy $\frac{5n-2}{3} \in \mathbb{N}$
   e) Legyen $\overline{xyzt}$ 13-al osztható szám. Mutassuk ki, hogy $\overline{tyzx}$ osztható 13-al akkor és csakis akkor ha $\overline{xy}$ osztható 13-al.
   f) Mutassuk ki, hogy $A = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ osztható 13-al
   g) Igazold, hogy a $(2^{2008} \cdot 3^{2009} + 6^{2008} + 5 \cdot 2^{2009} \cdot 3^{2008}) \vdots 7$-tel
   h) Ha $a, b, c \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $3|\overline{abc}$, mutassuk ki, hogy $\frac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{3} \in \mathbb{N}$
   i) Igazoljuk, hogy $\overline{abcd} + 1000\overline{abcd}$ alakú szám osztható 7-tel, 11-el, 13-mal
   j) Ellenőrizzük, hogy $3^{2008} + 6$ osztható 11-el
7. Az összes természetes számot 5-től 1000-ig elosztjuk 5-tel és a maradékokat összeadjuk. Menyi az így kapott összeg?
8. Legyenek $m, n \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $5|2^n + 3^m$. Mutassuk ki, hogy $5|2^m + 3^n$
9. Határozzuk meg azokat az a, b, c prímszámokat, amelyekre igaz, hogy $5|a \cdot b \cdot c$.és
   $a + b + c = M_8$; $(a + b + c)$ a lehető legkisebb
10. a) Mutassuk ki, hogy $(10^n + 206) \vdots 9$-el
    b) Mutassuk ki, hogy $(100^n + 4 \cdot 10^n + 4) \vdots 9$-el
    c) Mutassuk ki, hogy $(10^a + 2 \cdot 10^b + 3 \cdot 10^c) \vdots 3$-al
    d) Bizonyítsuk be, hogy $n = 9 + 9^2 + \cdots + 9^{1998}$ osztható 5 egymásután következő páratlan számmal!
    e) Igazoljuk, hogy $\overline{abcdabcd}$ alakú szám osztható 73-mal.
    f) Határozzuk meg azokat az $\overline{abc}$ alakú számokat amelyekre: $a \cdot b \cdot c = 3(a + b + c)$
11. Bizonyítsuk be, hogy $\exists$ három darab $n \in \mathbb{N}$ szám úgy, hogy $\overline{3n2}$ és $\overline{2n3}$ számoknak van legalább egy közös osztója.

Megoldottuk orán: 1, 2, 3, 4c, 4d, 5, 6e, 6f, 10b, 10c

Házi feladat a következő hétre: 4b, 4e, 6b, c, i, j, 9, 10a

A feladatokat válogatta és a köri tevékenységet irányította: Székely Enikő