Intervallumok.

♦ **Órán megoldott feladatok:**

1) Írjuk fel intervallum alakba a következő halmazt:

$A=\{x\in\mathbf{R}\mid [2x+3]=5\}$, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

2) Írjuk fel intervallum alakba a következő halmazt: $A=\{x\in\mathbf{R}\mid 3\le |x|<7\}$.

3) Tudva, hogy $a\in[0;12]$ és $b=4+a$. Igazoljuk, hogy $\sqrt{a^2+b^2}\in[4;20]$.

4) Legyen $x\in[-3;-2]$ és $y=x+3$.

Igazoljuk, hogy $E=\sqrt{x^2+6x+y^2+9}+\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5}$ kifejezés állandó.

5) Egy adott n természetes szám esetén tekintsük az $A_n=\{x\in\mathbf{R}\mid |x+n-6|\le 3n+4\}$ halmazt.

a) Írjuk fel az A_1 halmazt intervallum segítségével.

b) Határozzuk meg az $n\in\mathbf{N}$ számot úgy, hogy az A_n halmazban 609 egész szám legyen.

6) Tudva, hogy $a^2+b^2-3a-5b+\frac{33}{4}=0$, igazoljuk, hogy $4\le a+b+1\le 6$.

7) Egy háromszög két oldalának hossza 5 m, illetve 7m.

a) Igazoljuk, hogy a harmadik oldalának (méterben kifejezett) hossza egy olyan szám amely a $(2,12)$ intervallumban van.

b) Hány olyan háromszög létezik, amelynek az oldalait természetes számokkal fejezzük ki?

♦ **Javasolt házi feladat:**

1) Írjuk fel intervallum alakba a következő halmazt:

$A=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,\left[\frac{2x+1}{9}\right]=7\right\}$, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

2) Írjuk fel intervallum alakba az alábbi halmazt: $A=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,1\le\left|\frac{x-2}{5}\right|<2\right\}$.

3) Legyen $x\in[-2;3]$ és $x+2=5y$.

Igazoljuk, hogy $E=\sqrt{(x+2)^2+2y^2}+\sqrt{(x-3)^2+2(y-1)^2}$ kifejezés állandó.

4) a) Igazoljuk, hogy az $I=[32;64]$ intervallumból kiválasztható három szám, amelyek egy háromszög oldalai.

b) Adott az $A=[1;2014]$ intervallum, igazoljuk, hogy bárhogyan választunk az A intervallumból 23 számot a kiválasztott számok között létezik három szám, amelyek egy háromszög oldalai.

5) Tudva, hogy $x\in[-2;1]$, $y\in[-1;2]$, $z\in[-3;4]$ és $t\in[-4;3]$, igazoljuk, hogy

$x^2+y^2+z^2+t^2-x+y-z+t+1\in[0;37]$.

6) Adottak az $x,y\in\mathbf{R}$ úgy, hogy $x-y+1=0$ és $y\in[1;3]$.

Mutassuk ki, hogy $\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13}=2\sqrt{2}$.

7) Adottak az $x,y\in\mathbf{R}$ úgy, hogy $x\in(1,\infty)$ és $y\in(1,\infty)$, bizonyítsuk be, hogy $1+xy>x+y$.

♦ **Kiegészítő feladatok:**

1) Adottak az $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ úgy, hogy $a^2+b^2+c^2+d^2-a+b-c+d=0$.
Mutassuk ki, hogy $a,c\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ és $b,d\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$.

2) Adott az $A=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$, $x\in\mathbf{R}$ valós szám. Határozzuk meg az $a,b\in\mathbf{R}$ számokat tudva, hogy $A\in[a,b]$ bármely $x\in\mathbf{R}$ valós szám esetén, és az $[a,b]$ intervallum hossza minimális.

3) Határozzuk meg az $[a,b]\subset\mathbf{R}$ intervallumot tudva, hogy: $[a,b]\cap\mathbf{Z}=\Phi$ és $|b-a-1|=a^2+b^2+\frac{a}{2}-2b+\frac{21}{16}$.

4) Legyen $A=\{x\in\mathbf{N}|1\le x\le 2014\}$ és $B=\left\{(a,b)\in A\times A\,\middle|\,\frac{a^2+b^2}{7}\in\mathbf{N}\right\}$.
Határozzuk meg $cardA$ és $cardB$ értékét.

5) Ha $x,y\in\mathbf{R}$ úgy, hogy $x\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{3}\right]$ és $y\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$, igazoljuk, hogy $\frac{x}{y}\in\left[\frac{1}{4},2\right]$.

6) Ha $x\in\mathbf{R}$ úgy, hogy $x\in\left[\frac{1}{4},1\right]$, igazoljuk, hogy $\frac{8x+1}{2x-3}\in\left[-9,-\frac{6}{5}\right]$.

7) Adottak az $x,y\in\mathbf{R}$ úgy, hogy $x,y,z\in(1,\infty)$, bizonyítsuk be, hogy $xyz+x+y+z>1+xy+xz+yz$.

8) Ha $x,y\in\mathbf{R}$ úgy, hogy $x^2+y^2-x-3y+\frac{3}{2}=0$, igazoljuk, hogy $0\le x+y\le 4$.