Egyenlőtlenségek

Elméleti ismeretek: Adottak az a és b pozitív valós számok:

- $\min(a,b)=\begin{cases} a, a\le b \\ b, a>b \end{cases}$, az a és b számok közül a kisebb; • $\max(a,b)=\begin{cases} b, a\le b \\ a, a>b \end{cases}$, az a és b számok közül a nagyobb.
- $m_h=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, az a és b számok harmonikus közepe ; • $m_g=\sqrt{ab}$, az a és b számok mértani közepe;
- $m_a=\dfrac{a+b}{2}$, az a és b számok számtani közepe; • $m_p=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, az a és b számok négyzetes közepe;

♦ $\min(a,b)\le\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\le\max(a,b)$

Bizonyítás: Legyen $a\le b$,

$\min(a,b)\le\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\Leftrightarrow a\le\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\Leftrightarrow a+b\le 2b\Leftrightarrow a\le b$, (1)

$m_p=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\le\max(a,b)\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\le b\Leftrightarrow a^2+b^2\le 2b^2\Leftrightarrow a^2\le b^2, a\le b$, (2)

$m_a\le m_p\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\Leftrightarrow\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\le\dfrac{a^2+b^2}{2}\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0,$ (3)

$m_g\le m_a\Leftrightarrow\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\Leftrightarrow ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}\Leftrightarrow 0\le(a-b)^2$, (4)

$m_h\le m_g\Leftrightarrow\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}}\le\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$, igaz, ($m_g\le m_a$ egyenlőtlenség az $\dfrac{1}{a}$ és $\dfrac{1}{b}$), (5)

♦ Órán megoldott feladatok:

1.Igazoljuk, hogy az alábbi egyenlőtlenségek igazak bármely *a és b* pozitív valós számok esetében:

a) $a+\dfrac{1}{a}\ge 2$, b) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$, c) $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}\ge 6$, d) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$,

e) $6>\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

2. Igazoljuk, hogy : $\dfrac{\sqrt{6}}{5}+\dfrac{\sqrt{12}}{7}+\dfrac{\sqrt{20}}{9}+\dfrac{\sqrt{30}}{11}+\dfrac{\sqrt{42}}{13}+\dfrac{\sqrt{56}}{15}+\dfrac{\sqrt{72}}{17}+\dfrac{\sqrt{90}}{19}<4$.

3. Igazoljuk, hogy $\left(8+\dfrac{1}{a}\right)\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{8}\right)>\dfrac{113}{8}$, bármely *a és b* pozitív valós számok esetében

4. Határozzuk meg az x és y valós számokat úgy, hogy fennálljon a $\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{y^2-18y+81}\le 0$ egyenlőtlenség.

5. Ha $x,y,z\in(-1,+\infty)$, igazoljuk, hogy : $\dfrac{x^2+2x+10}{x+1}+\dfrac{y^2+2y+10}{y+1}+\dfrac{z^2+2z+10}{z+1}\ge 18$.

6. Adottak $a,b,c\in\mathbf{R}$ úgy, hogy $a+b+c=8$, $a^2+b^2+c^2=20$ és $a\cdot b\cdot c\ge 11$.

Határozzuk meg az $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ kifejezés legnagyobb értékét.

7. Igazoljuk, hogy $\frac{a+1}{\sqrt{a\cdot 1}}+\frac{a+2}{\sqrt{a\cdot 2}}+\frac{a+3}{\sqrt{a\cdot 3}}+\ldots+\frac{a+1007}{\sqrt{a\cdot 1007}}\geq 2014$, bármely $a\in\mathbf{R}_+^*$ esetén.

8. Igazoljuk, hogy $\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{15}}}}+\sqrt{22+\sqrt{6+\sqrt{4+\sqrt{24}}}}<10$.

9. a)Adottak $a,b\in\mathbf{R}$, igazoljuk, hogy $a^2-ab+b^2\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

b) Igazoljuk, hogy $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-cd+d^2}+\sqrt{d^2-ad+a^2}+\geq a+b+c+d$, bármely $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ esetén.

♦ Javasolt házi feladat:

1.Igazoljuk, hogy az alábbi egyenlőtlenségek igazak bármely *a,b és c* pozitív valós számok esetében:

a) $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$ b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$,

2.Mutassuk ki, hogy $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{1004\cdot 1005}}{2009}<502$.

3.Ha $x\geq 4, y\geq 9$ és $z\geq 16$, mutassuk ki, hogy $2\sqrt{x-4}+3\sqrt{y-9}+4\sqrt{z-16}\leq\frac{x+y+z}{2}$.

4.Mutassuk ki, hogy $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\geq 27abc$, bármely $a,b\in\mathbf{R}_+^*$ esetén.

5. Ha *a*,*b* és *c* egy háromszög oldalai, igazoljuk, hogy az $\frac{a}{1+a},\frac{b}{1+b}$ és $\frac{c}{1+c}$ számok is egy háromszög oldalai.

6. Igazoljuk, hogy $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}}<11$.