Vályi Gyula Matematikakör, 2017. október 27. VI. osztály

A feladatlapot összeállította és a köri tevékenységet vezette: Secareanu Éva

Mértani elemek

- **Műveletek szakaszokkal**
- **Felezőpont**

Órán megoldott feladatok:

1. Adott 5 pont úgy, hogy bármely három pont nem kollineáris. Az öt pont által alkotott szakaszok mindenikét kiszínezzük pirosra, zöldre vagy kékre. Igazold, hogy létezik legalább négy szakasz mely ugyanazzal a színnel van kifestve.
2. Egy O kezdőpontú félegyenesen felvesszük az A, B, C pontokat ebben a sorrendben. Legyenek M, N és P a [BC], [CA] és [AB] szakaszok felezőpontjai. Határozd meg az $\frac{OA+OB+OC}{OM+ON+OP}$ tört értékét.
3. Adottak ebben a sorrendben az $A, B, C \in d$ pontok, úgy hogy $AB = 28$ cm és $5BC = 3AC$.
   a.) Számítsd ki a [BC] és [AC] szakaszok hosszát!
   b.) Számítsd ki az [AC] és [BC] szakaszok felezőpontjai közötti távolságot!
4. Egy egyenesen felvesszük ebben a sorrendben az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{200}$ pontokat, úgy hogy $A_1A_2 = 4$ cm, $A_2A_3 = 8$ cm, $A_3A_4 = 12$ cm, … stb.
   a.) Számítsd ki az $[A_1A_{200}]$ és az $[A_{100}A_{200}]$ szakaszok hosszát!
   b.) Legyen M az $[A_1A_{200}]$ szakasz felezőpontja. Határozd meg a $k \in \mathbb{N}^*$ értékét, amelyre $M \in [A_kA_{k+1}]$
5. Legyen M az [AB] felezőpontja és C egy pont az (MB félegyenesen. Mutassuk ki, hogy $\frac{AC-BC}{2} \leq MB \leq \frac{AC+BC}{2}$.
6. Adott az [AB] szakasz, melynek hossza 1 m és a $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n \in (AB)$ pontok úgy hogy $AC_1 = \frac{1}{2}AC_2 = \frac{1}{3}AC_3 = \cdots = \frac{1}{n}AC_n = \frac{1}{n+1}AB$. Határozd meg n-et úgy hogy C_{17} az [AB] szakasz felezőpontja legyen.
7. Adottak ebben a sorrendben az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pontok úgy, hogy $A_1A_2 = 1$, $A_2A_3 = 2$, $A_3A_4 = 3$, …, $A_{n-1}A_n = n-1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Számítsd ki n értékét, tudva azt, hogy $A_7A_n = 232$.
8. Az (OB félegyenesen felvesszük az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ pontokat, úgy hogy $OB = 2$ cm, $OA_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = \frac{1}{2}$ cm, … , $A_nA_{n+1} = \frac{1}{2^n}$ cm, bármely $n \in \mathbb{N}^*$.
   a.) Mekkora lehet az $[A_1A_{10}]$ szakasz hosszának legnagyobb értéke? Hát a legkisebb?
   b.) Igazold, hogy a pontok bármely elhelyezése estén (a feladat feltételei mellett) minden A_n pont az (OB) szakaszon van, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.
9. Legyen M_1 az [AB] felezőpontja, M_2 az $[AM_1]$ felezőpontja, …, M_n az $[AM_{n-1}]$ felezőpontja. Határozd meg azt az n természetes számot, amelyre $AM_n = 1$ és
   $AM_n + AM_{n-1} + AM_{n-2} + \cdots + AM_1 = 127$.
10. Egy d egyenesen felvesszük ebben a sorrendben az $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{25}$ pontokat, úgy hogy $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 2$, $A_2A_3 = 3$ … , $A_{24}A_{25} = 25$. Az $[A_0A_{25}]$ szakaszon felvesszük még a $B_0, B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ pontokat is, melyek különböznek az $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{25}$ pontoktól, úgy hogy $A_0A_1 = A_1B_0 = B_0A_2 = A_2B_1 = B_1B_2 = B_2A_3 = \cdots = B_nA_{25} = 1$. Hány olyan 1 egység hosszúságú szakasz van, melyek végpontjai a $B_0, B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ pontok között találhatóak?

Házi feladat:

11. Legyen O_1 az $[OA]$ felezőpontja, O_2 az $[O_1A]$ felezőpontja, O_3 az $[O_2A]$ felezőpontja, …, O_{10} pedig az $[O_9A]$ felezőpontja. Ha tudod, hogy $O_9O_{10}= 5^{10}$ mm, számítsd ki az $[OA]$ km-ben kifejezett hosszát!

12. Az A, B, C, D, E, F pontok egy egyenesen helyezkednek el, ebben a sorrendben, úgy, hogy $AB=CD=EF$ és $BC=DE$. Tudva, hogy M az $[AB]$ felezőpontja és MD = 8 cm, határozzátok meg az $[AF]$ hosszát.

13. Legyen A, B, C, D négy kollineáris pont ebben a sorrendben úgy, hogy $3AB =$ $4CD$ és $4AC = 5BD$. Igazoljátok, hogy $AD = 8BC$.

14. Az A_0, A_1, … A_n kollineáris pontok ebben a sorrendben. Tudod, hogy $A_1A_2=A_0A_1 \cdot 2$, $A_2A_3=A_0A_1 \cdot 3$, …, $A_{n-1}A_n=A_0A_1 \cdot n$, A_0A_n=4692 cm és A_2A_5=204 cm.

a) Számítsd ki az A_0A_1, A_1A_2, … , $A_{n-1}A_n$ szakaszok hosszát!
b) Határozd meg az n értékét!

15. Adottak az A, M és B kollineáris pontok, ebben a sorrendben. Legyen O az $[AM]$ felezőpontja. Igazoljuk, hogy $2OB = AB + MB$.

16. Az A, B és C különböző pontok egy egyenesen helyezkednek el úgy, hogy a B pont az A és C pontok között van. Legyen M az $[AB]$, N pedig a $[BC]$ felezőpontja. Igazoljuk, hogy:

a) $AC= 2 \cdot MN$
b) ha az $[MN]$ és $[AC]$ felezőpontjai egybeesnek, akkor $AB = BC$.

17. Az AB szakasz belsejében felvesszük a C és D pontokat úgy, hogy $\mathrm{AC} = \frac{5}{6} \cdot \mathrm{AB}$ és $\mathrm{BD} = \frac{4}{5} \cdot \mathrm{AB}$. Legyen M az AB és P a CD szakasz felezőpontja. Számítsuk ki az AB szakasz hosszát, ha MP = 11 cm.

Kiegészítő feladatok:

1. Az A, B, C és D pontok egy egyenesen helyezkednek el ebben a sorrendben. Ha E, F, G, H az $[AB]$, $[AC]$, $[BD]$, $[CD]$ szakaszok felezőpontjai, EH = a cm és FG = b cm, határozzátok meg az AD szakasz hosszát.
2. A d egyenesen felvesszük az A, B, C, D pontokat úgy, hogy $B \in (AC), C \in (BD)$, $AC = 4\ cm, BD = 5\ cm$.
   a) Ha C a $[BD]$ szakasz felezőpontja, határozzátok meg az $[AD]$ szakasz hosszát.
   b) Ha $E \in (BC)$, számítsátok ki a $AE + BE + CE + DE$.
3. Egy d egyenesen felvesszük az $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$ pontokat úgy, hogy $A_1\ az\ [A_0A_2]$ szakasz felezőpontja, $A_2\ az\ [A_0A_3]$ szakasz felezőpontja, $A_3\ az\ [A_0A_4]$ szakasz felezőpontja,… $A_9\ az\ [A_0A_{10}]$ szakasz felezőpontja. Jelöljük $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots, M_9, az\ [A_0A_1], [A_1A_2], [A_2A_3], \dots, [A_9A_{10}]$szakaszok felezőpontjait. Tudva, hogy az$[A_9A_{10}]$ szakasz hossza 768 cm, határozzátok meg:
   a) az$[A_0A_1]$ $[A_4A_5]$$és$$[A_5A_6]$ szakaszok hosszát,
   b) az M_4 $és$ M_7 pontok közti távolságot.