Racionális számok –Versenyfeladatok

Órán megoldott feladatok:

1. a) Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi számokat:
$x=\left(\frac{1}{1000}+\frac{2}{1001}+...+\frac{1001}{2000}-1001\right):\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+...+\frac{1}{2000}\right)$ és
$y=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{1}{2001}\right)$.
b) Számítsuk ki lui $(-1)^{y-x}$ kifejezés értékét.

2. Legyenek az $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2010}$ szigorúan pozitív számok úgy, hogy:
$\frac{a_1+2}{a_1+3}+\frac{a_2+3}{a_2+4}+\frac{a_3+4}{a_3+5}+...+\frac{a_{2010}+2011}{a_{2011}+2012}=\frac{2010}{2011}$ és
A$=\frac{1}{a_1+3}+\frac{1}{a_2+4}+\frac{1}{a_3+5}+...+\frac{1}{a_{2010}+2012}$.
Mutassuk ki, hogy $2011\cdot A$ teljes négyzet.

3. Adott a következő szám: $A(n)=\frac{1}{n}\cdot\left(1\frac{1}{2013}+1\frac{2}{2013}+...+1\frac{n}{2013}\right)-\frac{n+1}{4026}$, $n\in\mathrm{N}^*$.
a) Számítsátok ki A érékét $n=5$-re;
b).Mutassátok ki, hogy az A szám természetes minden $n\in\mathrm{N}^*$ esetén.

4. Mutassuk ki, hogy: $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+...+\frac{1}{2013\cdot2015}<\frac{1}{2}$.

5 . Határozzuk meg az $n\in\boldsymbol{N}^*$ értékét úgy, hogy: $\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}=\frac{1}{5}$.

Házi feladat:

1. a) Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi számokat: $A=2+4+6+\ldots+4020$ és
$B=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{2001}\right)$.
b) Igazoljuk, hogy $x=A+2011B+2010$ négyzetszám.

2. Igazoljuk, hogy $A=\frac{1+2+3}{4}+\frac{5+6+7}{8}+\frac{9+10+11}{12}+\ldots+\frac{2301+2302+2303}{2304}+\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{576}\right)$
köbszám.

3. Legyen $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2010^2}$. igazoljuk, hogy $\frac{1}{4022}<A<\frac{1}{2010}$.

4. a) Igazoljuk, hogy: $\frac{2^{n-1}}{\left(2^n+1\right)\left(2^{n+1}+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$.
b) Határozzuk meg az $n\in\boldsymbol{N}^*$ értékét úgy, hogy: $\frac{1}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot9}+\frac{4}{9\cdot17}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{\left(2^n+1\right)\cdot\left(2^{n+1}+1\right)}=\frac{2^{2010}-1}{3\cdot\left(2^{2011}+1\right)}$.

5. **a)** Hasonlítsuk össze az x és y számokat, ahol
$x=\frac{1}{2}\cdot2^{-3}+\frac{4}{3}-1+2^{-1}\cdot\frac{1}{2^2}$ $y=\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+...+\frac{1}{97\cdot101}$

b) Mutassuk ki, hogy $\frac{152}{102} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{101^2} < \frac{201}{101}$.

6. Mutassátok ki, hogy: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{100}} < 1$.
7. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:
   a) $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \ldots + \frac{1}{x} = 3$, $x \neq 0$
   b) $\frac{1+2+\ldots+2013}{2013-2012+2011-2010+\ldots+5-4+3-2+1} = \frac{11x-1}{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2012\cdot 2013}}$.

8. Hasonlítsátok össze a következő törteket: $a = \frac{x+343^{671}}{x+2401^{503}}$, $b = \frac{y+625^{503}}{y+216^{671}}$.

9. Határozzuk meg az $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{2017}$ racionális számokat tudva, hogy fordítottan arányosak
   a $2, 6, 12, \ldots\ldots, 2017 \cdot 2018$ számokkal, valamint számtani közepük 1.

10. Mutassátok ki, hogy: a) $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén *.
    b) $\frac{2013}{1\cdot 2} + \frac{2012}{2\cdot 3} + \frac{2011}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{2012\cdot 2013} + \frac{1}{2013\cdot 2014} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{2013}{2014}$.