Vályi Gyula Matematikakör, 2017. október 27.   VII. osztály
A feladatlapot összeállította: Szász Szilárd

Paralelogrammák

1. (M.1.2014) Az $ABCD$ konvex négyszögben az AB és CD oldalak felezőmerőlegesei O pontban metszik egymást, ha $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD}) = 90^\circ$. Igazoljuk, hogy:
a) a négyszög átlói kongruensek;
b) a négyszög szembenfekvő oldalainak felezőpontjait összekötő szakaszok merőlegesek.

2. (M.6.2017) Egy ABC háromszög C csúcsán keresztül az AB oldallal párhuzamosan húzott egyenes a $\hat{B}$ belső szögfelezőjét D pontban metszi.
a) Ha $m(\hat{A}) \geq m(\hat{C})$, igazold, hogy $2BC \geq AD + AB$!
b) Mikor áll fenn az egyenlőség a fenti összefüggésben?

3. (M.6.2017) Az $ABCD$ négyszögben $\hat{A}$ és $\hat{B}$ pótszögek, az AD oldal D pontjában és a BC oldal C pontjában emelt merőlegesek M pontban metszik egymást. Igazoljuk, hogy $(AD + CM)^2 + (BC + DM)^2 = AB^2$.

4. (M.2.2017) Az ABC derékszögű háromszögben $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ és $[AD]$ magasság, ahol $D \in BC.$ A DAC szög szögfelezője a BC oldalt az E pontban metszi. Legyen F az $[AE]$ felezőpontja. A BF egyenes az AD magasságot a Q pontban, az AC oldalt pedig az S pontban metszi. Igazold, hogy
a) az ABE háromszög egyenlő szárú;
b) $AQES$ rombusz.

5. (M.2.2017) Az $ABCD$ paralelogrammában A hegyesszög. A paralelogramma oldalaira kívül megszerkesztjük az ABB_1A_2, BCC_1B_2, CDD_1C_2 és DAA_1D_2 négyzeteket.
a) Igazoljuk, hogy az AA_1CC_1 és $A_1B_2C_1D_2$ négyszögek paralelogrammák és középpontjuk egybeesik az $ABCD$ paralelogramma középpontjával.
b) Igazoljuk, hogy a négyzetek középpontjai egy rombuszt határoznak meg. Ez a rombusz négyzet?

6. (M.3.2016) Az ABC hegyeszögű háromszög külső tartományában megszerkesztjük az $ABMN$ és $ACEF$ négyzeteket. Igazoljuk, hogy:
a) $(CN) \equiv (BF)$ és $CN \perp BF$;
b) ha P a $[BC]$ felezőpontja, S pedig ANF háromszög A-ból húzott magasságának talppontja, akkor P, A, S kollineáris pontok.

7. (M.2.2016) Adott az $ABCD$ paralelogramma. A B pontnak az AD és DC szerinti szimmetrikusai H, illetve G, a D pontnak pedig az AB és BC szerinti szimmetrikusai E, illetve F.
a) Igazold, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma!
b) Igazold, hogy a két paralelogramma középpontja egybeesik!
c) Keress négy olyan pontot az A, B, C, D, E, F, G és H pontok közül, amelyek paralelogrammát alkotnak! Írd fel az összes esetet! (indoklás)

8. (M.4.2014) Az MNP háromszög egyenlő szárú $(MN = MP)$, $(MS$ az $\widehat{NMP}$ szögfelezője, ahol $S \in NP$. Legyen $R \in (MS)$ egy pont, amelyre $3RS = MS$. Az $(NR$ félegyenesen felvesszük a Q pontot úgy, hogy $R \in (NQ)$ és $3RQ = 2NQ$. Igazoljuk, hogy $MNPQ$ paralelogramma.

9. (M.6.2014; M.2.2014; M.1.2013) Az ABC derékszögű háromszögben $m(\hat{A}) = 90^\circ$, AD magasság, $D \in (BC)$, $(CE$ szögfelező, $E \in (AB), M$ az AD és CE metszéspontja.
a) Igazoljuk, hogy az AEM háromszög egyenlő szárú.

b) Ha $EF \perp BC$, $F \in (BC)$, igazoljuk, hogy $AF \perp CE$.

10. (M.7.2008) Az $ABCD$ rombusz síkjában vegyük fel az E, F, G és H pontokat úgy, hogy fennálljon az $EA \perp AB$, $EB \perp BC$, $GC \perp CD$ és $GD \perp DA$ összefüggések. Legyen $EA \cap GD = \{H\}$ és $GC \cap EB = \{F\}$. Bizonyítsuk be, hogy az $EFGH$ egy paralelogramma.

11. (M.10.2012) Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög és M, N, P, Q rendre az $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ oldalak felezőpontjai, I pedig az $[MP]$ felezőpontja. Igazoljuk, hogy $QI = IN$.

12. (M.7.2013) Az $ABCD$ paralelogramma BD átlójával az A ponton keresztül húzott párhuzamos egyenes a DC és a BC oldalak meghosszabbításait M, illetve N pontokban metszi. Az AC átlóval az M ponton keresztül húzott párhuzamos egyenes az AD oldal meghosszabbítását P pontban, az N ponton keresztül húzott párhuzamos egyenes az AB oldal meghosszabbítását Q pontban metszi. Igazoljuk, hogy

a) az $MNQP$ négyszög paralelogramma;

b) a PB és az AC szakaszok metszéspontja a BCD háromszög súlypontja.

13. (M.7.2013) Egy téglalap egyik átlójának a felezőmerőlegese a téglalap hosszabbik oldalát két olyan részre osztja, amelyek közül az egyik egyenlő hosszúságú a rövidebb oldallal. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?

14. (M.1.2017) Az ABC általános háromszög AB oldalán felveszünk egy M, az AC oldalán pedig egy N pontot úgy, hogy $BM = CN$. Ha A' a BC oldal, P pedig az MN szakasz felezőpontja, bizonyítsuk be, hogy PA' párhuzamos a $\widehat{BAC}$ szögfelezőjével.

15. (GM.9.2013) Adott az $ABCD$ paralelogramma úgy, hogy $AD \perp AC$. Legyen N a C pont merőleges talpontja a BD-re és P a B pont szimmetrikusa az AC szerint. Igazold, hogy $AN \perp NP$.

16. (Országos szakasz, Bukarest 2015) Az ABC derékszögű háromszögben $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $AC < AB$, $(BA$ és $(AC$ félegyeneseken felvesszük az E és D pontokat, úgy, hogy $A \in (BE)$ és $C \in (AD)$, valamint $AE = AC$ és $AD = AB$. Legyen M és N render a $[BC]$ és $[DE]$ felezőpontjai, ahol $EC \cap BD = \{R\}$. Bizonyítsd be, hogy $MN = RA$.

17. (Helyi szakasz, Hunyad 2015) Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$, M az $[AC]$ felezőpotja és $N \in AB, B \in (AN)$ úgy, hogy $BN = AM$. Ha $MN \cap BC = \{O\}$, igazold, hogy O az $[MN]$ szakasz felezőpontja és $OC = 3 \cdot OB$.

18. (Helyi szakasz, Bihor 2013) Az ABC általános háromszögben legyen $D \in AB$, $B \in [AD]$ úgy, hogy $[BD] \equiv [BC]$ és $E \in AC$ úgy, hogy $C \in [AE]$. Tudva, hogy M az ABC és ACB szögek szögfelezőinek metszéspontja, N pedig a $BCED$ négyszög átlóinak metszéspontja igazold, hogy $BMCN$ akkor és csakis akkor paralelogramma, ha $[BC] \equiv [CE]$.

19. (Helyi szakasz, Olt 2014) Az ABC háromszögben $M \in (BC)$, $D \in (AM)$. A D és C pontokon keresztül rendre az AB és AM egyenessel párhuzamosan egyenest húzunk, úgy, hogy $AM \cap AB = \{E\}$. Tudva, hogy AE párhuzamos BD-vel, bizonyítsd be, hogy M a $[BC]$ szakasz felezőpontja.