Vályi Gyula Matematikakör, 2017. december 8.   VII. osztály
A feladatlapot összeállította: Szász Szilárd

Műveletek gyökmennyiségekkel

1. (M.1.2017) Ha $\sqrt{\overline{192abc}}$ természetes szám, igazoljuk, hogy $\overline{(a+1)(b+2)c}$ négyzetszám.

2. (M.2.2014) Igazoljuk, hogy $m = \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 2016 + 2017}$ irracionális szám.

3. (M.4.2014) Határozzuk meg az $A = \{\overline{abcd} \mid \sqrt{\overline{abc5}} + \sqrt{\overline{bc5}} + \sqrt{\overline{c5}} = 105\}$ halmaz elemeit.

4. (M.4.2014) Határozzuk meg az n négyjegyű természetes szám azon értékeit, amelyekre $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}}$ természetes szám.

5. (M.6.2017) Az ábrán egy számtáblázat látható. Határozzuk meg, hogy hányas számmal kezdődik a táblázat 36. sora. Mely sorok kezdődnek racionális számmal?

$\sqrt{1}$			
$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$		
$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{11}$	
$\sqrt{13}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{19}$
....	....	....	....

6. (M.5.2017) Határozzuk meg az (x, y) számpárok lehetséges értékeit, ha fennáll a $\sqrt{5\cdot(x+1)^2} - 3\sqrt{5} = |y-1|\cdot\sqrt{7} - |\sqrt{5}-\sqrt{7}|$ egyenlőség.

7. (M.4.2017) Legyen $x_1 = \sqrt{1}, x_2 = \sqrt{3+5}, x_3 = \sqrt{7+9+11}, x_4 = \sqrt{13+15+17+19}$, és így tovább.
a) Számítsuk ki x_9 értékét.   b) Hány darab x_k szám racionális, ha $x \in \mathbb{N}^*$, k≤ 2017.

8. (M.5.2016) Határozzuk meg azokat az $\overline{abc}$ alakú természetes számokat, amelyekre $\sqrt{3\cdot\overline{abc}\sqrt{\overline{abc}}} \in \mathbb{N}$.

9. (M.7.2012) Határozzuk meg azokat az $\overline{ab}$ kétjegyű természetes számokat, amelyekre $a < b$ és $\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba} - 8\cdot(a+b)} \in \mathbb{N}$.

10. (M.7.2012) Ha $a = (2+4+6+\cdots+4024)\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2012\cdot 2013}\right)$ és $b = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2012}\right)$, igazoljuk, hogy $\sqrt{3a+2012b} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

11. (M.1.2014) Adott az $A = \sqrt{1} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7+9} + \sqrt{1+3+5+7+9+11+13} + \cdots + \sqrt{1+3+5+\cdots+2013}$ szám. Igazoljuk, hogy $\sqrt{A}$ természetes szám.

12. (Helyi szakasz, Brassó 2009) Legyen $a_n = 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + \cdots + 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Igazold, hogy $\sqrt{a_4}$ irracionális.
b) Hány $\sqrt{a_n}$ racionális szám van, ahol $n \in \mathbb{N}^*$?

13. (Helyi szakasz, Galac 2009) Határozzuk meg az a háromjegyű természetes szám azon értékeit, amelyekre $\sqrt{a+23+\sqrt{a+\sqrt{a+2009}}}$ természetes szám.

14. (Helyi szakasz, Jászvásár 2009) Határozzátok meg az $A=\{\overline{abc}\mid\sqrt{\overline{abc}}-\sqrt{c}\in\mathbb{N}\text{ és } a,b,c \text{ különböző számjegyek}\}$ halmaz elemeit.

15. (Helyi szakasz, Karácsonkő 2009) Hány $\overline{abc}$ alakú szám teljesíti azt, hogy $\sqrt{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}-\overline{a0b}-\overline{b0c}-\overline{c0a}}\in\mathbb{N}$.

16. (Helyi szakasz, Szucsáva 2009) Igazold, hogy $A=\sqrt{\frac{41}{502}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2008\cdot2009}\right)}$ racionális szám.

17. (Vasile Bușagă, 24.01.2009; Beszterce 2008) a) Igazold, hogy $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, ahol $k\in\mathbb{N}^*$

b) Számítsd ki az $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$ összeget.

c) Igazold, hogy $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{120\sqrt{119}+119\sqrt{120}}>\frac{5}{11}$.

18. (Grigore Moisil, Szatmár 2009) Határozd meg az a,b és c nemnulla számjegyeket, ahol teljesül a $\sqrt{a}+\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{\overline{abc}}+\sqrt{a+b+c}=\overline{cc}-\overline{bb}-\overline{aa}$ összefüggés.

19. (Helyi szakasz, Kovászna 2012) Határozzuk meg azokat az $\overline{xyz}$ alakú természetes számokat, amelyekre teljesül, hogy $\sqrt{5-x}+\sqrt{6-y}+\sqrt{13-z}+\sqrt{x+y+z}=8$

20. (Helyi szakasz, Galac 2013) Igazold, hogy $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2013+1994}$ nem természetes szám!

21. (Országos szakasz, Bukarest 2015) a) Bizonyítsd be, hogy ha létezik két p és q természetes szám úgy, hogy $\sqrt{2p-q}$ és $\sqrt{2p+q}$ természetes szám, akkor q páros.

b) Hány p természetes számra teljesül, hogy $\sqrt{2p-4030}$ és $\sqrt{2p+4030}$ természetes számok?

22. Határozd meg a $\overline{bc}$ prímszámot, tudva azt, hogy $\sqrt{\overline{abc}}$ természetes szám.

23. (PANAITOPOL, Tulcsa 2013) Adottak az $a_1,a_2,\ldots,a_{10}$ különböző és pozitív természetes számok. Ha $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{10}}}>\sqrt{39}$, mutasd ki, hogy legalább egy az $a_1,a_2,\ldots,a_{10}$ számok közül nem természetes.

24. (Helyi szakasz, Szucsáva 2011) Határozd meg az x egész számot, ha $\frac{\sqrt{\frac{2011+x}{2011-x}}+\sqrt{\frac{2011-x}{2011+x}}}{\sqrt{\frac{2011+x}{2011-x}}-\sqrt{\frac{2011-x}{2011+x}}}\in\mathbb{Q}$.