Vályi Gyula Matematikakör, 2018. január 19.   VII. osztály
A feladatlapot összeállította: Szász Szilárd

Mértani középarányos Középarányosok egyenlőtlenségével megoldható feladatok

1. (M.3.2014) Az a, b, c pozitív valók számok esetén igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}+\frac{a+b+c}{2} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$$

2. (M.3.2016) Igazold, hogy $\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{99\cdot 100}<5000$.

3. (M.3.2016) Igazold, hogy $(x+2)(2y+3)(3z+4) \geq 96\sqrt{xyz}$, bármely $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ esetén!

4. (M.2.2013) Legyenek x, y, z olyan pozitív valós számok, amelyekre $x+2y+z=42$. Határozzuk meg az $(x+y)(y+z)$ szorzat maximális értékét.

5. (M.5.2017) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x+y+z-17=2\sqrt{x-5}+4\sqrt{y-7}+6\sqrt{z-19}$$

6. (M.4.2017) Igazoljuk, hogy $\frac{\sqrt{72}}{17}+\frac{\sqrt{90}}{19}+\frac{\sqrt{110}}{21}+\frac{\sqrt{132}}{23}+\frac{\sqrt{156}}{25}+\frac{\sqrt{182}}{27}<3$.

7. (M.5.2016) Igazoljuk, hogy $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\cdots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}<\frac{n}{2}$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

8. (M.2.2014) Igazoljuk, hogy az $a, b, c>0$ számok esetén fenáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$$

9. Igazoljuk, hogy $\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{42}}{13}+\cdots+\frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1}<\frac{n}{2}$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

10. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $a \cdot b \cdot c=1$. Mutasd ki, hogy

$$(a+b)(b+c)(a+c)(a+b+c) \geq 24$$

11. Ha $x, y, z \in (0,1)$ úgy, hogy $x \cdot y \cdot z=\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-z^2}$, számítsd ki az $x \cdot y \cdot z$ szorzat maximális értékét.

12. Határozd meg az x, y, z számokat, ha $\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}=\frac{3}{2}$.

13. Igazold, hogy $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2010}<\frac{2010\cdot 2011}{4}$.

14. Igazold, hogy $\sqrt{2x}+\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x+5} \leq 3x+6$, bármilyen x pozitív valós szám esetén.

15. Igazoljuk, hogy $\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}+\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7}+\frac{\sqrt{4\cdot 5}}{9}+\frac{\sqrt{5\cdot 6}}{11}<\frac{5}{2}$.

16. Igazoljuk, hogy $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$, ahol $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

17. Legyenek x, y, z olyan pozitív valós számok, amelyekre $\frac{2x}{\sqrt{y}} = \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{2\sqrt{z}}{y}, \frac{2y}{\sqrt{z}} = \frac{z}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{z}$ és $\frac{2z}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{y}}{x}$.

Mutasd ki, hogy $x \cdot y \cdot z = 8$.

18. Ha x és y olyan pozitív valós számok, amelyekre $x + y = 6xy$, határozd meg az $5x + 5y$ legkisebb értékét.

19. Az $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ számok összege 16. Mutasd ki, hogy $\sqrt{ab+ac} + \sqrt{ab+bc} + \sqrt{bc+ac} \leq 24$.

20. Mutasd ki, hogy $2 \cdot \left(\sqrt{1\cdot 2} + \sqrt{2\cdot 3} + \cdots + \sqrt{2008\cdot 2009}\right) < 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + 2008\cdot 2009$.

21. Ha $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ és $3a + 5b = 1$, mutassuk ki, hogy $\sqrt{3a+1} + \sqrt{5b+2} < 2\sqrt{2}$.

22. Adott az a, b, c, d pozitív valós számok, ahol $a \cdot c = b \cdot d = 10$. Mutassuk ki, hogy

$$(a+2)(b+2)(c+5)(d+5) \geq 1600.$$

23. Igazold, hogy $\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{15}} > \frac{131}{140}$.

24. Igazold, hogy $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \ldots + \frac{29}{\sqrt{210}} \geq 28$.

25. Mutassuk ki, hogy $\frac{1}{c(a+b)} + \frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(a+c)} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}\right)$ tudva,

hogy $a \cdot b \cdot c = 1$.

26. Mutassuk ki, hogy bármilyen $x > 1$ valós szám esetén $2\sqrt{2} > \frac{x+1}{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+2}}}$.

27. Legyen $x \geq 0$ valós szám. Igazoljuk, hogy $\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2005} + \sqrt{2x+2006} < 3x + 2007$.