Vályi Gyula Matematikakör, 2018. február 23.   VII. osztály
A feladatlapot összeállította: Szász Szilárd

Betűkkel jelölt valós számok. Képletalkalmazás. Tényezőre bontás.

1. (M.4.2016) Igazoljuk, hogy $E(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)+1$ pozitív, bármely x valós szám esetén.

2. (M.7.2016) Határozzuk meg a $8x^2 - 14xy + 16y^2 - 4x - 36y + 2056$ kifejezés legkisebb értékét.

3. (M.8.2016) Határozzuk meg azokat a nullától különböző x és y természetes számokat, amelyekre $x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$.

4. (M.7.2015) Határozzuk meg az a számjegyet, tudva, hogy $(\overline{a7})^2 = \overline{7a(7+a)}$.

5. (M.4.2013) Határozzuk meg az a valós szám értékeit amelyekre $a^2(a^4 - 7a^2 + 20) = 2a^4 - 3a^2 + 15$.

6. (M.5.2013) Igazoljuk, hogy $\sqrt{9p^2 + 10p + 3} - 3p + 2012$ irracionális, bármely p természetes szám esetén.

7. (M.6.2014) a) Igazoljuk, hogy bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $(a^2+1)(b^2+1) + 50 \geq 2(2a+1)(3b+1)$.

b) Határozzuk meg, az $n, p \in \mathbb{N}$ számokat, ha $(n^2+1)(p^2+1) + 45 = 2(2n+1)(3p+1)$.

8. (M.6.2014) Az $E = (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 3x + 5) + 4$ kifejezést írjuk fel teljes négyzet alakjában.

9. (M.6.2014) Ha $a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} - 2b\sqrt{3} + 5 = 0$, igazoljuk, hogy $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(b - a) = 1$.

10. (M.1.2013) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán

$$\sqrt{x^2 + 6x + 34} + \sqrt{y^2 - 2y + 10} + \sqrt{z^2 - 6z + 25} = 12.$$

11. (M.4.2014) Oldjuk meg a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halmazon az $a^2 + b^2 + 7(b - a) = 54$ egyenletet.

12. (M.6.2017) Határozzuk meg azokat az x és y természetes számokat, amelyekre $x^2 + y^2 = 17(x - y)$. Hány megoldása van az egyenletnek az egész számok halmazán?

13. (M.6.2017) Az x és y pozitív valós számokra $x + y = 1$. Igazoljuk, hogy

a) $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$;   b) $x^3 + y^3 \geq \frac{1}{4}$;   c) $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}$.

14. (Helyi szakasz, Jászvásár 2014) Határozd meg az $\overline{ab}$ alakú számokat, amelyekre teljesül a $\sqrt{a + \sqrt{\overline{ab}}} = a$.

15. (Helyi szakasz, Braila 2011) Mutasd ki, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}^*$ úgy, hogy $5x^3 + 2x^2y = 2y^3 + 5xy^2$, akkor $\frac{3x+4y}{4x+3y} \in \mathbb{Z}$.

16. (Helyi szakasz, Mehedinti 2013) Oldd meg az egész számok halmazán a $15xy - 35x - 6y = 3$ egyenletet.

17. Igazold, hogy nem léteznek olyan a, b és c valós számok, amelyek teljesítenék a $6a^2 + 6b^2 = 2ab + 2a + 2b + 49c + 1$ egyenletet.

18. Igazold, hogy bármilyen n természetes szám esetén $N = 3^n + 2^{4n+1} \cdot 5^{n+1}$ osztható 11-gyel.

19. Vizsgáld meg, hogy létezik-e olyan n természetes szám, hogy $a = 2^{2013} - 23 \cdot 2^{2008} + 2^n$ teljes négyzet legyen.

20. Határozd meg az a és b valós számokat, ha $\sqrt{a^2 - 6a\sqrt{2} + 19} + \sqrt{b^2 - 4b\sqrt{3} + 16} \leq 3$.

21. (Helyi szakasz, Olt 2013) Határozd meg az $(x^2 + 6x + 52)(y^2 - 10y + 84) = 2537$ egyenlet egész megoldásait.