VÁLYI GYULA MATEMATIKA KÖR

FELKÉSZÍTŐ TÁBOR,

Parajd, 2018 április 20-21-22

Feladatok, VII. oszt.

1. Az ABCD trapézban AB $\parallel$ CD, AB $>$ CD, felvesszük a P és Q pontokat (P $\in$ AD és Q $\in$ BC) úgy, hogy AQ $\parallel$ PC. Mutassuk ki, hogy PB $\parallel$ DQ.

2. Az ABC háromszög szögeinek mértékei egyenesen arányosak a 14, 12 és 10 számokkal. Az ABC∢ szögfelezője BN, N $\in$ AC. Az AM, (M $\in BC$) szakasz szimmetrikus AB-vel az AD magasságra nézve, BN metszi AM-et a P pontban. Határozzuk meg a PMCN négyszög szögeinek mértékét.

3. Egy konvex négyszög három oldalának hossza egyenlő **a** –val. Két egyenlő hosszúságú oldal merőleges egymásra és a másik szög, melyet két egyenlő hosszúságú oldal képez, 60^0-os. Számítsuk ki a negyedik oldal és a két átló hosszúságát **a** függvényében.

4. Az ABCD trapéz A és D szögeinek mértéke 90^0. Igazoljuk, hogy az AC és BD átlók akkor és csakis akkor merőlegesek, ha AD az alapok mértani középarányosa.

5. Az ABC derékszögű háromszög befogóinak méretei: AB = 12 cm, AC = 5 cm. A BC átfogó M felezőpontjába, az átfogóra húzott merőleges AB-t az N pontban, AC-t a P pontban metszi. Számítsuk ki: a) az MNB háromszög kerületét,
b) az ANP háromszög területét,
c) a BP szakasz hosszúságát.

6. Az **a** hosszúságú AB szakaszon felvesszük az M mozgó pontot. Szerkesszük meg az AMEF és MBCD négyzeteket az AB ugyanazon oldalán. Jelöljük az FC szakasz felezési pontját P-vel. Igazoljuk, hogy miközben az M pont mozog az AB-n, a P pont helye állandó és az $\frac{FC}{EB}$ arány értéke változatlan. Számítsuk ki a P pont távolságát AB-től!

7. Az ABC háromszögben a C szög mértéke az A és B szögek mértékének számtani középarányosa (m(A∢) > m(B∢)). Az A és B szögek mértékeinek harmonikus középértéke 45. Számítsuk ki a háromszög szögeinek mértékét és a DE szakasz hosszát, ha AD⊥BC, CAE∢ ≡ BAE∢ és AC = 6 cm.

8. Az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében felvesszük az M pontot. MD ⊥ BC, ME ⊥ CA, MF ⊥ AB. Ha az ABC háromszög oldalának hossza **a**, mutassuk ki hogy

$$\text{BD} + \text{CE} + \text{AF} = \frac{3a}{2}.$$

9. Igazoljuk, hogy ha egy konvex négyszögnek két szembenfekvő szöge tompaszög, akkor a csúcspontjaikat összekötő átló kisebb, mint a másik átló.

10. Az ABC háromszög A szögének mértéke 90^0. A háromszög belsejében olyan félkört szerkesztünk, melynek középpontja a BC átlón van és a félkör érinti mindkét befogót.

a) Ha **b**-vel és **c**-vel jelöljük a két befogót, **r**-rel pedig a félkör sugarát, igazoljuk, hogy:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

b) Ha $m(BCA\sphericalangle) = 30°$ és a kör középpontjának az A csúcsponttól való távolsága $10\sqrt{2}$ cm, számítsuk ki az ABC háromszög kerületét és területét.

11. Jelöljük a $\mathcal{C}$(O, R) körön kívüli M pont távolságát a kör O középpontjától $\boldsymbol{d}$-vel. Az M ponton átmenő tetszőleges egyenes a kört A és B pontokban metszi.

Igazoljuk, hogy: a) MA·MB = k (állandó)

b) $d^2 - R^2 = k$

c) ha MT érintője a körnek a T pontban, akkor $MA \cdot MB = MT^2$.

12. Az A-ban derékszögű háromszög méretei: AB = 40 cm, AC = 30 cm. Ha AD magasság, AE szögfelező, AF oldalfelező, D, E, F ∈ BC, számítsuk ki:

a) DE, EF, AE szakaszok hosszát

b) C távolságát AE-től.

Igazoljuk, hogy AE szögfelezője a DAF szögnek.

13. Az ABCD téglalap méretei: AB = 40 cm, BC = 30 cm. A téglalap síkját behajtjuk az AC mentén, míg az (ADC) sík merőleges az (ABC) síkra. Számítsuk ki a térbeli BD szakasz hosszát.

A feladatokat összeállította: Sebestyén Júlia