VÁLYI GYULA MATEMATIKA KÖR

FELKÉSZÍTŐ TÁBOR,

Parajd, 2018 április 20-21-22

Feladatok, VIII. oszt.

1. Az ABCD téglalap méretei: AB = 40 cm, BC = 30 cm. A téglalap síkjára az A, D és C csúcspontokban az AM = 20 cm, DN = 10 cm, CP = 30 cm merőlegeseket állítjuk.
a) Mutassuk ki, hogy MB = NP.
Számítsuk ki:
b) az NBP háromszög kerületét.
c) az MBN háromszög területét.
d) az ABCDNMP csúcspontú test térfogatát, ha NB a test éle és MP nem éle a testnek.

2. Az ABCD szabályos tetraéder éleinek hossza **a** cm. Határozzuk meg a tetraédert határoló háromszögek súlypontjai által alkotott tetraéder térfogatát **a** függvényében.

3. A VABC tetraéder élei: $VA \perp VB \perp VC \perp VA$ és az élek hosszúságai VA = **a**, VB = **b**, VC = **c**. A tetraédert metsző $\boldsymbol{\alpha}$ sík párhuzamos az ABC síkkal és a metszéspontok:
$VA \cap \boldsymbol{\alpha} = \{A'\}$, $VB \cap \boldsymbol{\alpha} = \{B'\}$, $VC \cap \boldsymbol{\alpha} = \{C'\}$. Ha $\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{2}{3}$, határozzuk meg az A'B'C'ABC térfogatát és a V csúcspont távolságát az (A'B'C') síktól.

4. Az $\boldsymbol{\alpha}$ és $\boldsymbol{\beta}$ síkok ($\boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{d}$) lapszögének mértéke 60°. Az $\boldsymbol{\alpha}$ síkban felveszünk egy O középpontú, 4 cm sugarú kört, melynek középpontja 8 cm-re van a lapszög élétől:
AO = 8 cm, $A \in \boldsymbol{d}$. Az O pontban az $\boldsymbol{\alpha}$ síkra emelt merőleges a $\boldsymbol{\beta}$ síkot B pontban metszi. Az AO meghosszabbítása a kört másodszor a C pontban metszi és ezen a meghosszabbításon felvesszük az M pontot úgy, hogy OM = 8 cm. Az M pontból a körhöz húzott MD érintő ($D \in \mathscr{C}(O, 4)$) az AT érintőt ($T \in \mathscr{C}(O, 4)$) F pontban metszi.
Számítsuk ki: a) az FD és TD szakaszok hosszát
b) a BTM háromszög kerületét
c) a BATDM gúla térfogatát.

5. Az ABCD egyenlőszárú trapéz alapjai AB = 20 cm, CD = 10 cm és az A szöge 60°-os. Az A, C és D csúcspontokba felállítjuk az AM = 5 cm, CP = DN = 10 cm merőlegeseket. Az M, N és P pontok által alkotott (MNP) sík a DA és CB oldalak meghosszabbításait E és F pontokban, a B csúcspontban a trapéz síkjára emelt merőlegest a Q pontban metszi. Az MN és PQ egyenesek S pontban metszik egymást.
Határozzuk meg: a) az AD, BQ, EF, MS szakaszok hosszát
b) az (MNP) sík és az ABCD trapéz síkja által alkotott lapszög mértékét

c) az SEFCD test teljes felszínét és térfogatát.

6. Az $\boldsymbol{\alpha}$ és $\boldsymbol{\beta}$ félsíkok 60°-os lapszöget képeznek. $\boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{d}$. Az AB térbeli szakasz vetületei az α félsíkra CD és a β félsíkra EF, a lapszög élére pedig MN. A szakaszok méretei: AB = **a**, BD = BF = 2**a** .Az AB meghosszabbítása a *d* élet P-ben metszi, úgy hogy $m(BPN\sphericalangle) = 60°$. Számítsuk ki a DBFNCAEM test térfogatát és teljes felszínét.

7. Egy szabályos háromszög alapú gúla alapéle és magassága fordítottan arányos a $\frac{\sqrt{3}}{9}$ és $\frac{1}{2}$ számokkal, összegük pedig $8 \cdot (3\sqrt{3} + 2)$. Számítsuk ki:

a) az alapélek és a magasság hosszát

b) az alap apotémájának és a gúla apotémájának hosszát

c) az összes él hosszának összegét

d) a gúla teljes felszínét és térfogatát

e) az alaptól milyen távolságra kell metszeni a gúlát az alappal párhuzamos síkkal ahhoz, hogy a keletkezett két test térfogata ugyanannyi legyen.

8. Egy szabályos hatszög alapú csonkagúla alapéleinek hossza a következő egyenletrendszer megoldásai: $\begin{cases} \frac{2x-3y}{2} + \frac{x+2y}{11} = 3 \\ \frac{4x-2y}{7} - \frac{3y-x}{4} = 2 \end{cases}$

A csonkagúla egyik oldallapja az alapsíkkal 60°-os szöget alkot.

Számítsuk ki:

a) a csonkagúla alapéleinek magasságának, apotémájának és oldalélének hosszát

b) az egyik nagyalapél (AB) felezőpontjának a vele szebenfekvő oldallaptól való távolságát

c) két egymásmelletti oldallap lapszöge felének a szinuszát.

A feladatokat összeállította: Sebestyén Júlia