Vályi Gyula Matematikakör, VI. osztály
Körvezető tanár: Secareanu Éva
2018.03.23.

<u>MERŐLEGESSÉG</u>

1. Az ABC háromszög (AP szögfelezője, $P \in (BC)$, a B csúcsból induló magasságot a D pontban metszi, a C csúcsból induló magasságot pedig a az E pontban metszi. Tudva, hogy a D pont ugyanolyan távol van az AC oldaltól, mint az E pont az AB oldaltól, igazoljuk, hogy $[AB] \equiv [AC]$.

2. Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Merőlegest húzunk az AB, illetve AC egyenesekre az A pontban és felvesszük rajtuk az M, illetve N pontot, úgy hogy $[AM] \equiv [AB]$, $[AN] \equiv [AC]$, valamint M és C az AB egyenes, B és N az AC egyenes különböző oldalán legyenek. Igazoljuk, hogy $[MC] \equiv [BN]$.

3. Legyen M az ABC háromszög belső tartományában egy pont úgy, hogy $\frac{m(\widehat{MBC})}{m(\widehat{ABC})} = \frac{m(\widehat{MCB})}{m(\widehat{ACB})} = \frac{1}{3}$, valamint P és Q az AB, illetve AC szakaszok azon pontjai, melyekre $[BP] \equiv [BM]$ és $[CQ] \equiv [CM]$. Az ABM és ACM szögek szögfelezői az S pontban metszik egymást.
   - **a.)** Mutassuk ki, hogy [BM az $\widehat{SBC}$ szögfelezője.
   - **b.)** Mutassuk ki, hogy [SM az $\widehat{BSC}$ szögfelezője.
   - **c.)** Mutassuk ki, hogy $[MQ] \equiv [MP]$.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges háromszög két oldalához tartozó magasságvonalainak talppontjai egyenlő távolságra vannak a harmadik oldal felezőpontjától.

5. Adott az ABC egyenlő oldalú háromszög, X egy olyan pont (CA félegyenesen, amelyre $A \in$ (CX. Legyen D a $\widehat{BAX}$ szögfelezőjének, E pedig az (AB félegyenesnek egy olyan pontja, amelyekre $AE + EC = DA + AC$. Bizonyítsuk be, hogy a (CD félegyenes az $\widehat{ACE}$ szögfelezője.

6. Az $\widehat{XOY}$ szög (OX szárán felvesszük az A és B pontokat, $A \in (OB)$, az (OY szárán pedig a C és D pontokat úgy, hogy $[OA] \equiv [OC]$ és $[OB] \equiv [OD]$. Az AD és BC egyenesek az I pontban metszik egymást. Igazoljuk, hogy:
   - **a.)** Az AOD és COB háromszögek kerülete ugyanannyi.
   - **b.)** $\widehat{ADB} \equiv \widehat{CBD}$,
   - **c.)** (OI az $\widehat{XOY}$ szögfelezője.

7. Az ABCD négyzet AC átlóján felvesszük az M pontot úgy, hogy $[AM] \equiv [AB]$. Adott $P \in BC$ úgy, hogy $MP \perp AC$, valamint $R \in AB$ úgy, hogy $B \in (AR)$ és $[BP] \equiv [BR]$. Igazold, hogy:
   - **a.)** $[MC] \equiv [MP] \equiv [BP]$.
   - **b.)** Az M, P és R pontok egy egyenesen helyezkednek el.

8. Az ABC háromszög BC oldalán felveszünk egy tetszőleges M pontot. Legyen $ME \perp AB$, $E \in (AB)$ és $MF \perp AC$, $F \in (AC)$. Az ME és MF egyeneseken felvesszük a P és Q pontokat, úgy hogy E és F a (PM), illetve (MQ) szakaszok felezőpontja legyen.

a.) Igazoljuk, hogy $BP + CQ = BC$.

b.) Határozzuk meg a $\widehat{BAC}$ mértékét úgy, hogy az A, P, Q pontok kollineárisak legyenek.

9. Az ABC háromszög (AB), (BC) és (AC) oldalainak felezőpontja rendre M, N, illetve P. Felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy M a (CD) és P az (NE) felezőpontja legyen. Igazoljuk, hogy:

a.) $[AE] \equiv [NC]$, **b.)** AD=2AE.

10. Az $\widehat{XOY}$ hegyesszög mértéke 60^0. A szög (OZ szögfelezőjén felvesszük az M pontot úgy, hogy OM = 12 cm legyen, majd az M pontból merőlegest húzunk a száraira úgy, hogy $MA \perp OX$, $A \in OX$ és $MB \perp OY$, $B \in OY$.

a.) Igazoljuk, hogy AMB egyenlő szárú háromszög.

b.) Igazoljuk, hogy $AB \perp OM$.

c.) Számítsuk ki az $[ON]$ és $[NM]$ szakaszok hosszát, ha $\{N\} = [AB] \cap [OM]$.