

VALÓS SZÁMOK. GYÖKVONÁS

- Legyen $a = \sqrt{28} - \sqrt{72} + \sqrt{80}$, $b = -\sqrt{63} + \sqrt{162} - \sqrt{180}$ és $c = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$.
Mutassátok ki, hogy $a : b + c \in \mathbb{N}$.
- Soroljátok fel az $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 1 < \sqrt{1 + \sqrt{n}} < 2\}$ halmaz elemeit. (M.M.O, 2004)
- Határozzátok meg az $x \in \mathbb{Q}$ számokat úgy, hogy $x\sqrt{3\sqrt{x}} = 3\sqrt{x\sqrt{3}}$.
- Ha $|a + 1| - 2 = |b + 2| \cdot \sqrt{3} - |1 - \sqrt{3}|$, határozzátok meg az a és b racionális számokat. (O.M.O., 1991)
- Határozzátok meg a k azon egész értékeit, melyekre $\sqrt{6k - k^2} \in \mathbb{Q}$.
- Határozzátok meg az \overline{xy} , 10-es számrendszerbe írt számokat, ha tudjuk, hogy $\sqrt{\frac{\overline{xy}+24}{\overline{xy}-24}} \in \mathbb{N}$.
- Igazoljátok, hogy $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2018 + 2018}$ irracionális szám!
- Igazoljátok, hogy $\sqrt{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}} \notin \mathbb{Q}$, bármely a, b, c nemnulla számjegyek esetén.
- Határozzátok meg az \overline{abc} alakú természetes számokat, amelyre $3\sqrt{\overline{a, (bc) + b, (ca) + c, (ab)}} = \overline{ab}$.
- Legyen $A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}{\sqrt{2017 \cdot 2018}}$
 - Igazoljátok, hogy $0 < A < 1$
 - Határozd meg az $\sqrt{2018} \cdot A$ szám egész részét!
- Igazold, hogy $\sqrt{5n + 3} \notin \mathbb{Q}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.
- Legyen $x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{15} + \sqrt{21}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$.
Határozd meg azt a legnagyobb egész számot, amely kisebb mint x .
- a) Igazoljátok: $\sqrt{\frac{8}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \dots + \frac{119}{784}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{112}\right) = 4$
b) Tudva, hogy $\overline{123abc}$ teljes négyzet, számítsd ki $\sqrt{123abc}$.
- Igazold, ha a, b, c nemnulla racionális számok, úgy, hogy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, akkor $N = \left(\frac{ab}{c} + 1\right) \left(\frac{bc}{a} + 1\right) \left(\frac{ca}{b} + 1\right)$ nemnegatív és $\sqrt{N} \in \mathbb{Q}$.

HÁZI FELADAT:

- Számítsd ki $\sqrt{A - 2009B}$, ahol $A = 2 + 4 + 6 + \dots + 4016$ és $B = 2008 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009}\right)$.
- Határozd meg az $E = \sqrt{(a - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2a - \sqrt{3})^2} + |\sqrt{2} - \sqrt{3}|$ kifejezés értékét, tudva, hogy $1 < a < \sqrt{2}$.

3. Adottak az $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$ és

$$b = (|3^{51} - 2^{85}| + 3^{2011} \cdot 81^{490}) : (-4^{41}) + \sqrt{1296} + \sqrt{(8 - 5\sqrt{3})^2} - \sqrt{75} + \sqrt{2^8}.$$

a) Hasonlítsd össze az a és b számokat!

b) Ellenőrizd, hogy $3a$ és \sqrt{b} elemei-e az $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+1}{2x-5} \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Igazold, hogy $\sqrt{\frac{abab}{ab}} > 10$, bármely \overline{ab} természetes szám esetén.

5. Határozd meg az $M = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \sqrt{\frac{25-3n}{2n+3}}, n \in \mathbb{N}\right\}$ halmaz elemeit.

6. Határozd meg az \overline{abc} alakú természetes számokat, amelyre $a < b < c$ és $x = \sqrt{a, b(c) + b, c(a) + c, a(b)} \in \mathbb{Q}$.