VÁLYI Gyula matematikakör
2018 december 10
Körvezető tanár: Secareanu Éva

A MÉRTANI KÖZÉP. EGYENLŐTLENSÉGEK

1) Igazoljuk, hogy:

a) $\sqrt{1.9 \cdot 2.1} + \sqrt{2.8 \cdot 3.2} + \sqrt{3.7 \cdot 4.3} < 9$

b) $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8\,, a, b, c \in \mathbb{R}_+$ ha tudjuk, hogy $abc = 1$.

c) $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} < 4\,, ahol\ a, b > 0\ úgy\ hogy\ a + b = 4.$

2) Igazold, hogy bármely x pozitív szám esetén $\sqrt{2x} + \sqrt{2x + 2008} + \sqrt{2x + 2009} \leq 3x + 2010$

3) Igazold, hogy $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+$ esetén.

4) Igazold, hogy $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \cdots + \frac{\sqrt{1004 \cdot 1005}}{2009} < 502$

5) Ha $x \geq 4,\ y \geq 9,\ z \geq 16$, igazold hogy $2\sqrt{x-4} + 3\sqrt{y-9} + 4\sqrt{z-16} \leq \frac{x+y+z}{2}$. Milyen esetben áll fenn egyenlőség?

6) Igazoljuk, hogy $\sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{30} + \sqrt{42} + \sqrt{56} < 30$

7) Igazoljuk, hogy $\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \cdots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

8) Igazoljuk, hogy:

a) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

b) $\left(a + \frac{b}{ac}\right)\left(b + \frac{c}{ba}\right)\left(c + \frac{a}{cb}\right) \geq 8 \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

9) A számitások elvégzése nélkül igazold, hogy:

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \geq 32$$

10) Igazoljuk, hogy:

$$\sqrt{\frac{x(y+z)}{3}} + \sqrt{\frac{y(z+x)}{3}} + \sqrt{\frac{z(x+y)}{3}} \leq \frac{5}{6}(x+y+z) \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$$

HÁZI FELADAT:

1. Ha $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, igazoljuk, hogy

a) $\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$

b) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

2. Ha $x > 0, y > 0$ és $z > 0$ úgy hogy $x + y + z = 1$, akkor igazold, hogy: $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x} \geq 12$

3. A négyzetgyökvonás elvégzése nélkül mutasd ki, hogy: $\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15} < 10$

4. Mutasd ki, hogy: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > 6$

5. A számitások elvégzése nélkül, igazold, hogy $a < 4$, ha

$a = \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \frac{\sqrt{56}}{15} + \frac{\sqrt{72}}{17} + \frac{\sqrt{90}}{19} + \frac{\sqrt{110}}{21} + \frac{\sqrt{132}}{23}$