

2019.február11.

## VERSENYFELADATOK

- Adottak az  $x \neq 1, y \neq -2$  és  $z \neq -3$  racionális számok, amelyek teljesítik a következő feltételt:  
$$\frac{2016}{x+1} + \frac{2016}{y+2} + \frac{2016}{z+3} = 2015$$
. Határozd meg az  $A = \frac{x-1}{x+1} + \frac{y}{y+2} + \frac{z+1}{z+3}$  racionális számot.  
( H.M.O. 2016, Krassó Szörény megye)
- Számítsd ki a következő számok számtani közepét:  
 $A = (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 3 + \dots + (-1)^{2013} \cdot 2014 + (-1)^{2014} \cdot 2015$   
 $B = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} + 1$ .  
(Supliment G.M.nr.10/2014)
- Határozd meg  $n \in \mathbb{N}$  értékeit, amelyre  
$$\sqrt{\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{n(4n+4)}} = \frac{3\sqrt{10}}{19}$$
.  
( H.M.O. 2016, Maros megye)
- Az ABCD egyenlő szárú trapézban  $AD \parallel BC$ ,  $AE \perp BC, E \in (BC), BD \cap AE = \{T\}$ . Az M és N pontok az AB, illetve CD szakaszok felezőpontjai,  $T_{ABD} = T_{ABE}$  és  $[AE] \equiv [AD]$ . Igazold, hogy:  
a.) M, T és N kollineáris pontok  
b.)  $AB \parallel DE$   
c.)  $T_{DEC} = T_{ABED}$ .  
( H.M.O. 2018, Kovászna megye)
- Az ABC háromszögben legyen I a háromszög belső szögei szögfelezőinek metszéspontja, P és Q az A pontból a BI és CI egyenesekre húzott merőlegesek talppontjai, valamint az R és S pontok a B és C pontokból a CI, illetve BI egyenesekre húzott merőlegesek talppontjai. Igazold, hogy  
a.)  $\frac{AP}{CS} + \frac{AQ}{BR} > 1$   
b.)  $\frac{CS}{AP} + \frac{BR}{AQ} > \frac{BC^2}{AB \cdot AC}$   
(Supliment G.M.nr.10/2014)
- Egy pénzösszeget három testvér között osztottak szét . A legnagyobb kapta az összeg 34%-át, míg a középső és a legkisebb a 4 és 7 számokkal egyenesen arányos pénzösszeget kapott. A legnagyobb és a középső által kapott pénzösszegek különbsége 24 lej. Hány lej kaptak külön-külön a testvérek?  
( H.M.O. 2018, Kovászna megye)
- Oldjátok meg a valós számok halmazán az  $\frac{x+4}{5} + \frac{x+5}{6} + \frac{x+6}{7} + \dots + \frac{x+99}{100} = 96$  egyenletet.  
( H.M.O. 2016, Hargita megye)
- Az ABCD paralelogrammában az  $\hat{A}$  és  $\hat{D}$  szögek szögfelezői az M pontban metszik egymást, a  $\hat{B}$  és  $\hat{C}$  szögek szögfelezői pedig az N pontban.  
a.) Számítsd ki az  $\widehat{AMD}$  mértékét!  
b.) Ha  $AD < DC$  gazold, hogy  $MN \parallel DC$ .  
( H.M.O. 2016, Kovászna megye)

### HÁZI FELADAT:

1. Oldd meg az  $5xy + 11z = 55$  egyenletet, ha  $x, y, z \in \mathbb{N}$ .

( H.M.O. 2018, Kovászna megye)

2. Az ABCD paralelogrammában legyen  $AC \cap BD = \{O\}$ , M és N az O-ból az AB, valamint az AD oldalakra húzott merőlegesek talppontjai. Legyen  $P \in (OC)$  úgy, hogy  $[PM] \equiv [PN]$  és R az (AO) szakasz felezőpontja. Ha  $[MN] \equiv [OC]$ , igazold, hogy:
- R, M, N kollineáris pontok,
  - ABCD négyzet.

( H.M.O. 2018, Kovászna megye)

3. Adott az ABCD négyzet  $AC \cap BD = \{O\}$  és az  $E \in (BD)$ ,  $Q \in (AC)$ ,  $F \in (DO)$  pontok, úgy hogy  $\frac{DE}{BD} = \frac{1}{8}$ ,  $\frac{AQ}{AC} = \frac{7}{8}$  és  $\frac{EF}{DO} = \frac{1}{2}$ . Igazold, hogy:
- ABQE egyenlő szárú trapéz,
  - $HO < \frac{AB}{2}$ , tudva, hogy  $FC \cap AE = \{H\}$ .

( H.M.O. 2016, Krassó Szörény megye)

4. Tekintsük az ABCD trapézt  $AB \parallel CD$ ,  $AB > CD$  és jelöljük E-vel az AD szakasz felezőpontját. Legyen  $EP \perp BC$ ,  $P \in (BC)$ .
- Mutasd ki, hogy  $T_{ABCD} = EP \cdot BC$ .
  - Ha  $AB = 3 \cdot DC$  és  $T_{EAB} = 6 \text{ cm}^2$ , számítsd ki az ABCD trapéz területét!

( H.M.O. 2016, Kovászna megye)

5. Hasonlítsd össze az  $A = \frac{(-1)^n}{3 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^6 + 9 \cdot (-1)^9 + \dots + 2016 \cdot (-1)^{2016}}$  és  $B = (-1)^n \cdot \frac{1}{288} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{1008} + (-1)^{n+2} \cdot \frac{1}{2016}$  számokat, tudva, hogy n természetes szám!

( H.M.O. 2016, Kovászna megye)