

## Metrikus relációk

1. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melyben  $AB = 5$  cm,  $BC = 7$  cm,  $AC = 4\sqrt{2}$  cm. Ha  $D \in (BC)$  és  $BD = 3$  cm mutassátok ki, hogy  $AD \perp BC$ .
2. Legyen ABCD egy derékszögű trapéz ( $AB \parallel CD$ ,  $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^\circ$ ), melynek átlói merőlegesek. Mutassátok ki, hogy  $AD^2 = AB \cdot CD$ .
3. Az A-ban derékszögű ABC háromszögben,  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ ,  $DE \perp AB$ ,  $DF \perp AC$ ,  $E \in (AB)$ ,  $F \in (AC)$ . Ha  $E', F'$  az E, illetve F pontok vetületei a BC egyenesen, akkor :  
a) mutassátok ki, hogy az  $AE'F'$  háromszög egyenlő szárú;  
b) abban az esetben, ha  $2E'F' = BC$ , állapítsátok meg milyen háromszög az ABC.
4. Az ABC háromszögben  $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ ,  $AB = 15$  cm,  $AC = 20$  cm és  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ . Vegyük fel az AB egyenesen az M és N pontokat úgy, hogy  $AM = BC$ ,  $AN = CD$  és  $A \in (BM)$ , illetve  $B \in (AN)$ . Mutassátok ki, hogy  $MC \perp NC$ .
5. Az ABCD téglalapban  $AB = a$ ,  $BC = b$  és az M pont a CD oldal felezőpontja. Mutassátok ki, hogy  $AM \perp BD$  akkor és csak akkor, ha  $a = b\sqrt{2}$ .
6. Legyen ABCD egy négyzet, melynek oldala  $a$  és az  $M \in (AC)$  úgy, hogy az MBD háromszög egyenlő oldalú. Számítsátok ki az MC hosszát és a BCM háromszög területét.
7. Legyen egy ABCD paralelogramma. Mutassátok ki, hogy  $AC^3 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ .
8. Legyen ABC egy háromszög és M a [BC] szakasz felezőpontja. Mutassátok ki, hogy:  $4AM^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2$ .
9. Legyen ABCD egy téglalap és M egy változó pont a síkban. Mutassátok ki, hogy:  $MA^2 + MC^2 = MD^2 + MB^2$ . Fogalmazzátok meg a fenti állítás fordítottját és bizonyítsátok be.

### HÁZI FELADAT:

- 1) Az ABC háromszög, melyben  $m(\hat{A}) = 90^\circ$  ekvivalens az ABEF négyzettel, melynek átlója  $4\sqrt{2}$  cm, és amely a háromszög külső tartományában helyezkedik el. Határozzuk meg a háromszög A csúcsából húzott magasság hosszát.
- 2) Az ABC háromszögben  $m(\hat{A}) = 60^\circ$  és  $2AB = 3AC$ . Igazoljuk, hogy  $2AB^2 = AC^2 + 2BC^2$ .
- 3) Az ABC egyenlő szárú háromszögben  $AB = AC = 18$  cm,  $m(\hat{A}) = 120^\circ$ . A G pont a  $\widehat{BAC}$  szög AD szögfelezőjén van,  $D \in [BC]$  és  $G \in [AD]$ , úgy hogy  $GD = 1$  cm. Megszerkesztjük a CE oldalfelezőt,  $E \in AB$  és  $BG \cap CE = \{N\}$  :  
a) Igazoljuk, hogy  $CE = 3CN$ .  
b) Igazoljuk, hogy DNPQ paralelogramma, ahol  $AD \cap CE = \{Q\}$  és  $BQ \cap AC = \{P\}$   
c) Számítsd ki a DNPQ négyszög területét.
- 4) Igazoljuk, hogy egy derékszögű háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha  $p = (1 + \sqrt{2}) \cdot h$ , ahol p a háromszög félkerülete, h pedig az átfogóhoz tartozó magasság.
- 5) Legyen  $P \in (AB)$  és M az [AB] szakasz felezőpontja. Az AB egyenes ugyanazon oldalán felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy ADP és PEB egyenlőszárú derékszögű háromszögek legyenek, melyek derékszögei D-ben és E-ben legyen. Határozd meg a DME háromszög szögeinek mértékét.