Betűkkel jelölt valós számok. Képletalkalmazás.Tényezőre bontás

1. Az a és b nem nulla természetes számokra fennáll: $2\sqrt{a}=b\sqrt{2}$.

a) a $\frac{b^2}{a}$ értéke: ....

b) Ha a=18, akkor b=..... .

2. Ha $\left(\sqrt{3}-2\right)^2=a+b\sqrt{3}$, a,b∈ $\boldsymbol{Z}$**,** akkor

a) a=... b)$\left(a+b\sqrt{3}\right)\left(a-b\sqrt{3}\right)$ =....

3. Legyen a,b∈ $\boldsymbol{R}^*$**,** $a\neq -b$. Igazold, hogy ha $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a+b}$, akkor $\frac{1}{a}=\frac{b-1}{b}$.

4. Ha a,b,c∈**R**,úgy, hogy $a-2b+3c=7\sqrt{2}$, akkor igazold, hogy

$$\left(a-\sqrt{2}\right)^2+\left(b+2\sqrt{2}\right)^2+\left(c-3\sqrt{2}\right)^2=a^2+b^2+c^2.$$

5. a) Ha xyz=1, számítsd ki $E=\frac{xz}{xz+z-1}-\frac{y}{xz-y+1}-\frac{1}{xy-x-1}$.

   b)Határozd meg x, y, z egész értékeit, úgy, hogy egyszerre teljesüljenek az alábbiak:

   i) $\frac{11}{x+y}=\frac{8}{z+y}=\frac{9}{z+x}$, ii)$(x+y)(y+z)(z+x)=6336$.

6. Legyenek m, n egész számok és $a=\frac{(2m+5)^2-(2n-3)^2}{4}$
   a) mutassátok ki, hogy a egy egész szám.
   b) Határozzátok meg az m és n számokat, ha a prímszám.
7. Mutassátok ki, hogy $a=\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}+1$ természetes szám.
8. Ha x=5+y, számítsd ki $x^2+y^2+x-2xy-y-2$ értékét!
9. a)Ha x+y=21 és xy=90, számítsd ki x^2+y^2 értékét!
   b)Ha x–y=11 és x^2-y^2=165, számítsd ki x+y értékét!
   c)Ha xy=63 és $x^2+y^2=130$, számítsd ki x–y és x+y értékét!
   d)Ha x+y=17 és $x^2+y^2=145$, számítsd ki xy és x–y értékét!
10. Végezzétek el:
    a) $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{8}-2}\right)^2$
    b) $\left(\sqrt{6\sqrt{3}+9}+\sqrt{\sqrt{12}-3}\right)^2$
    c) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}+\sqrt{\sqrt{12}-3}\right)^2$
11. Bármely x,y,z∈**R**esetén, igazoljátok a következő egyenlőtlenségeket:

a) $(x+3)^2$≥2x+5

b) $x^2-4x+y^2-8y+20$≥0

c) $x^2-2x+y^2-4y+z^2-6z+14$≥0

d) $(x^2+2x)(x^2+2x+2)+2$>0

12. a)Ha $x+\frac{1}{x}=4$, számítsd ki $x^2+\frac{1}{x^2}$ és $x^4+\frac{1}{x^4}$!
    b)Ha $x^2+\frac{1}{x^2}=2$, számítsd ki $x+\frac{1}{x}$ és x–$\frac{1}{x}$!

13. Mutasd ki, hogy:

    a) $(3x$–$1)^2$–$(4x+2)(1-4x)-2(4x-1)\in\boldsymbol{R}_+$,bármely x∈**R**

    b) $\sqrt{(x^2-6x)(x^2-6x+4)+4}$∈**Q,** bármely x∈**Q**

14. Az $a = \left(\sqrt{15 - 2\sqrt{14}} - \sqrt{15 + 2\sqrt{14}} + 1\right)^{2k}$, k∈**Z,** szám

a) természetes b) racionális vagy c)irracionális?

15. Ha *x, y* valós számok és $(2x - 3)^2 + (3y + 5)^2 = 4x^2 + 9y^2$, kkor igazold, hogy *6x–15y=17*.

16. Az *x, y* valós számok esetén $4x^2 + 9xz + 5y^2 = 0$. Igazold, hogy $\frac{2x+3y}{3x+4y} \epsilon \boldsymbol{N}$**.**

17. Igazold, hogy ha x,y∈ $\boldsymbol{R}^*$úgy hogy $5x^3 + 2x^2y = 2y^3 + 5xy^2$, akkor $\frac{3x+4y}{4x+3y} \epsilon \boldsymbol{Z}$.

18. Legyen $n = 2a^2 + 3b^2$, ahol *a,b*∈**N**, *a≠b*. Igazold, hogy *n* felírható 3 teljes négyzet összegeként.

19. Ird fel az $n = 11a^2 + 10b^2 - 6a + 9$, *a,b*∈$\boldsymbol{N}^*$, mint 3 teljes négyzet összege.

20. Igazold, hogy $\sqrt{x^2 + 4x + 13} + \sqrt{4x^4 + 8x^2 + 9} + \sqrt{9x^6 + 12x^3 + 53} \geq 15$. Lehetséges-e az egyenlőség?