Vályi Gyula Matematikakör, 2018 október 26.   VIII. osztály
A feladatlapot összeállította: Hamar Erzsébet

Valós szám modulusa, egész része, törtrésze.

Emlékeztető

Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén fennállnak a következő összefüggések!

$\|a\| \geq 0$ $\|-a\| = \|a\|$ $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$ $\|a^n\| = \|a\|^n \ , n \in \mathbb{N}^*$ $\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}, b \neq 0$ $ha\ b > 0, \|a\| \leq b \Leftrightarrow \ -b \leq a \leq b$ $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ $\|a-b\| \leq \|a\| + \|b\|$ $\big\|\|a\| - \|b\|\big\| \leq \|a-b\|$	$\{a\}$ – törtrész $[a]$ – egész rész $\in \mathbb{Z}$ $[a] + \{a\} = a$ $a - 1 < [a] \leq a \Leftrightarrow [a] \leq a < [a] + 1$ $0 \leq \{a\} < 1$ $[a] + [b] \leq [a+b] \leq [a] + [b] + 1$ $[a+k] = [a] + k \ , k \in \mathbb{Z}$ $\{a+k\} = \{a\}, k \in \mathbb{Z}$ $ha\ a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}\ akkor\ [-a] + [a] = -1$ $[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] + \left[a + \frac{1}{3}\right] + \cdots + \left[a + \frac{1}{n}\right] = [na], n \in \mathbb{N}^*$
Az n! szám p prímtényezőjének hatványa egyenlő: $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^k}\right]$, ahol $n \geq p^k$	

Órán megoldott feladatok

1. Számítsd ki:

$a)\ a = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{40}{2}\right]$ $b)\ b = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{99}{2}\right]$

$c)$ $n \geq 1$ esetén igazold, hogy $S = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2}\right]$, akkor teljes négyzet, ha n páros.

2. Határozd meg az a és b különböző számjegyeket, ha tudod, hogy:
$\left[\sqrt{\overline{abb}}\right] + \left[\sqrt{\overline{bba}}\right] + \left[\sqrt{\overline{bab}}\right] = a + \overline{bb}$
3. Adott az x, y, z különböző valós számok, igazold, hogy:
$(|x-y| + |y-z| + |z-x|) \cdot \left(\frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{|y-z|} + \frac{1}{|z-x|}\right) \geq 10$
4. Adott az a, b, c valós számok úgy, hogy $abc \neq 0$ és $(a+b)(a+c)(b+c) \neq 0$
igazold, hogy: $\left|\frac{a}{b+c}\right| + \left|\frac{b}{a+c}\right| + \left|\frac{c}{a+b}\right| > 1$
5. Határozd meg x pozitív valós számot és n nullától különböző természetes számot melyre fennáll a következő egyenlőség: $[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1{,}005 \cdot n$.

Javasolt feladatok

6. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:
$a)\ \big||x+2| - |x-1|\big| = x + 3$
$b)\ \frac{[x] + \{x\}}{2} = [x]$

$c)\ \left[\frac{10x+2}{6}\right] = \frac{5x+6}{2}$

$d)\ x+1 = 4\{x\} + [x]$

7. A mértani és számtani közepe két különböző a és b természetes számnak $\overline{xy}$, illetve $\overline{yx}$. Számítsd ki $|a-b|$.
8. Igazold, hogy bármely a és b valós szám esetén:
   $\sqrt{|a^2-1||b^2-1|} \leq |1+ab| + |a+b|$
9. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:
   $min\{6x, |x|\} \leq 3x-1$
10. Adott az $A = \{n \in \mathbb{N} | [\sqrt{n+2}] = [\sqrt{n}], n \leq 2013\}$, határozd meg az A halmaz kardinálisát.
11. Oldd meg a valós számok halmazán:
    $a)\ \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = 2013$
    $b)\ \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = 2014$
    c) $\{x\} - \{2013 \cdot x\} = x$
12. Adott, a $P(x) = [2x] - [x] - \left[x + \frac{1}{2}\right], x \in \mathbb{R}$, kifejezés

    a) Számítsd ki $P(\sqrt{2})$ é*s* $P(\sqrt{3})$ értékeit.

    b) Igazold, hogy *P(x)=0*

13. Számítsd ki :

    $a)\ S = \left[\frac{2010+1}{2}\right] + \left[\frac{2010+2}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{2010+2^{2010}}{2^{2011}}\right]$

    $b)\ \left[\sqrt{n^2+n}\right], n \in \mathbb{N}$

14. Határozd meg az $[10\sqrt{n^2+n}], n \in \mathbb{N}^*$ utolsó számjegyét.
15. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

    $a)\ |x+1| + (x+1) + [x+1] = 10$ $b)\ (x-1)^2 + [x+1]^2 = 4$

    $c)\ \left[\sqrt{\frac{x+2}{3}}\right] = \frac{x-1}{3}$ $d)\ x = \frac{\{x\}}{[x]}$

    $e)\ 2^{[x]+[y]+1} - 2^{[x]} = 1984$

16. Oldd meg az egész számok halmazán:

$$\left[\frac{\left[\frac{3x+1}{2}\right]+1}{2}\right] = \left[\frac{6x-1}{2}\right] - \left[\frac{5x-4}{2}\right]$$

Megjegyzés: 5 feladat a házi feladat a javasolt feladatokból