Vályi Gyula Matematikakör, 2018 december 14. VIII. osztály
A feladatlapot összeállította: Hamar Erzsébet

Merőlegesség a térben

Órán megoldott feladatok:

1. Adott az $ABCD$ rombusz, az A csúcsában merőlegest emelünk, melyen felvesszük az E pontot. Az $AC \cap BD = \{O\}$ és az $F \in CE$ úgy, hogy $OF \perp CE$. Igazold, hogy $BF \perp CE$ és $DF \perp CE$.
2. Adott az $ABCD$ trapéz, $AB \parallel CD$ úgy, hogy $AB + CD = AD$. Az A csúcsból merőlegest emelünk a trapéz síkjára, melyen felvesszük az M pontot. Legyen N a BC felezőpontja. Igazold, hogy $MN \perp DN$.
3. Adottak az $AA'B'B$ és $CC'B'B$ különböző síkban helyezkedő paralelogrammák úgy, hogy $AB = BC, AB' = BC'$ és $AA' \perp AC$. Igazold, hogyha $CM \perp BB', M \in BB'$, akkor $B = M$ és $AA' \perp (ACB)$.
4. Az ABC egyenlő oldalú háromszög BC oldalán felvesszük a D pontot úgy, hogy $2 \cdot CD = BD$ és az AD felezőponját jelöljük E-vel. Felvesszük az EM merőlegest az ABC síkjára. Határozd meg az ME szakasz hosszát úgy, hogy az ABM háromszög egyenlő szárú legyen.
5. Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában megszerkesztjük a $C'N \perp BD'$. Jelöljük a $D'C'$ szakasz felezőpontját M-nek és $BC' \cap B'C = \{O\}$.
   a) Igazold, hogy $ON \perp MN$
   b) Ha $AB = a$, határozd meg a $B'C$ és MN egyenesek közti távolságot.
6. Az $ABCA'B'C'$ szabályos háromoldalú hasábban $AA' = 4\sqrt{2}$cm és $AB = 8$. Igazold, hogy $BC' \perp AB'$

Házi feladat:

7. Adott az $ABCD$ rombusz úgy, hogy $m(BAD\sphericalangle) = 60°$ és $AB = a$ cm. A rombusz síkjának azonos felére felvesszük az AP és CQ merőlegeseket. Legyen $M \in (BP)$ úgy, hogy $PB = 5 \cdot MB, N \in (PD)$ úgy, hogy $MN \parallel BD$ és $AP = a\sqrt{3}$cm.
   a) Igazold, hogy $(AMN) \perp (BDP)$
   b) Számítsd ki a CQ szakasz hosszát úgy, hogy $(AMN) \parallel (BDQ)$.
8. Adott az $ABCDMNPQ$ kocka, $AB = 1 + \sqrt{2}$ cm és $[BT$ a $CBP\sphericalangle$szögfelezője $T \in (CP)$, $S \in (DQ)$ úgy, hogy $SD = 2$ cm. Ha $BS \cap NO = \{U\}$ és $UT \cap (ABC) = \{R\}$, számítsd ki BR szakasz hosszát.
9. Igazold, hogy egy szabályos négyoldalú gúlában, a szemben fekvő oldallapok akkor és csakis akkor merőlegesek egymásra, ha két egymásmelletti oldallapja 120°-ot zárnak be egymással.
10. Adottak az A, B, C, D nem koplanáris pontok úgy, hogy $AB \perp CD$ és $AC \perp BD$. Igazold, hogy $AD \perp BC$ és $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$
11. Az ABCDA'B'C'D' kockában legyen M a BB' felezőpontja, N a C'D' felezőpontja. Igazold, hogy $AM \perp CN$ és $O'A \perp BD$, ha $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$.
12. Adott az $ABCD$ téglalap, $AB > BC$. Az A csúcsban merőlegest emelünk, a téglalap síkjára melyen felvesszük az $P \neq A$ pontot, legyenek az M és N pontok az A-ból, BP-re illetve DP-re húzott merőlegesek talppontjai.
    a) Határozd meg az AB és PD egyenesek által közrezárt szög mértékét.
    b) Igazold, hogy $CP \perp (AMN)$.